Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
DiploMat 01905

torsdag den 8. december 2005, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.
På kuverten bedes med stor skrift anført retningsbetegnelse (B, E, IT, K eller M) og klasse (A-klassen eller B-klassen).

Opgave 1 (15 point).

Maplekommandoen

```
combine(sin(x)^2*cos(3*x));
```

giver som resultat

$$\frac{1}{2}\cos(3x) - \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(5x)$$

1. Vis, at dette resultat er korrekt ved at bruge Eulers formler.
2. Udnyt Maple-resultatet til at finde integralet

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(3x)\,dx$$

Opgave 2 (20 point).

I Maple er indtastet følgende kommandoer:

```
A:=Matrix([[4,1,26],[-1,6,12],[0,0,-2]]):
Determinant(A-lambda*IdentityMatrix(3)):
factor(%);
NullSpace(A+2);
```

Output fra Maple er

$$-(2+\lambda)(\lambda-5)^2$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

I de følgende spørgsmål kan disse oplysninger benyttes.

1. Find egenværdierne for matricen A.
2. Find for hver egenværdi samtlige egenvektorer.
3. Afgør, om matricen A er diagonaliserbar.

Opgave 3 (15 point).

I Maple er indtastet følgende kommandoer:

```
ligning:=diff(x(t),t,t)+6*diff(x(t),t)+25*x(t)=102*sin(t):
dsolve({ligning,x(0)=-1,D(x)(0)=4});
```

Output fra Maple er

$$x(t) = 4\sin(t) - \cos(t)$$

Find bl.a. ved brug heraf den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$x'' + 6x' + 25x = 102\sin(t)$$

Opgave 4 (15 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'(t) = \cos(t)\, x(t)^2 + \sin(t)$$

med begyndelsesværdien $x(0) = 1$. Det bemærkes, at Maple (og vi andre!) ikke kan finde en formel for løsningen til dette begyndelsesværdiproblem.

Find det 2. Taylorpolynomium P_2 for løsningen, idet udviklingspunktet er 0.

Opgave 5 (20 point).

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x^2 + 6y^3 + 6xy$$

for alle $(x, y) \in R^2$. Find de stationære punkter for f, og bestem for ethvert af disse, om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt.

Opgave 6 (15 point).

Find planintegralet

$$\iint_D y\,dA$$

hvor den indre og den ydre begrænsning af integrationsområdet D er givet i polære koordinater r og θ ved ligningerne $r = \cos^2(\theta)$ og $r = 1$ med $0 \leq \theta \leq \pi$. Til orientering er vist integrationsområdet (farvet gråt):