DiploMat 01905

Preben Alsholm

8.december 2004

Opgave 1

Vi skal løse ligningen

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right) z^4 + 32 = 0$$

og indtegne roddernes placering i den komplekse plan sammen med den cirkel hvorpå rødderne ligger. Rødderne skal angives på rektangulær form.

Ligningen er binom. Vi omskriver først til formen

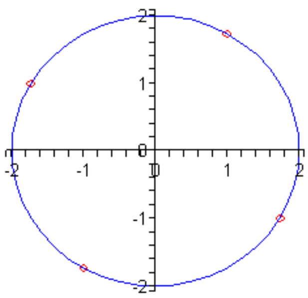
$$z^4 = -\frac{32}{1 - i\sqrt{3}} = -\frac{32\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{4} = -8\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Herefter finder vi

$$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{2}\right)}$$

med $p = 0, 1, 2, 3$. Altså har vi de fire rødder

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - i, \quad z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$$



Opgave 2

Der er givet ligningssystemet

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 2a-1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ ax_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & -a+2 \end{array}$$

1. Vi skal vise, at systemet for $a \neq \pm 1$ har netop én løsning, og bestemme denne løsning. Vi finder totalmatricen til

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2a-1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & a & 1 & -a+2 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - R_1, R_3 := R_3 - aR_1$ giver matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 2-2a^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

For $a \neq \pm 1$ kan vi nu udføre operationerne $R_2 := \frac{1}{a-1} R_2$ og $R_3 := \frac{1}{1-a^2} R_3$, hvorved vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 2a-1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nu er matricen på echelonform, rangen er 3, den samme som antal søjler, så systemet har præcis én løsning, når $a \neq \pm 1$. Vi går videre med operationerne $R_2 := R_2 + R_3, R_1 := R_1 - aR_3$, der giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Endelig giver operationen $R_1 := R_1 - R_2$ matricen på reduceret echelonform

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Denne matrix svarer til ligningssystemet $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$, som jo samtidigt er løsningen. Løsningen afhænger altså (sjovt nok) ikke af a!

2. Vi skal nu løse ligningssystemet for $a = -1$ og for $a = 1$. Vi begynder med $a = -1$. Ved indsættelse af $a = -1$ i (1) fås

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operationerne $R_2 := -\frac{1}{2} R_2, R_1 := R_1 - R_2$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricen er nu på reduceret echelonform. Det tilsvarende ligningssystem er $x_1 = -2, x_2 - x_3 = -1$. Vi ser, at x_3 er fri. Vi sætter $x_3 = t$ og finder så

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ -1+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in R$.
Nu betragter vi så $a = 1$. Af (1) fås ved indsættelse af $a = 1$ matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er blot ligningen $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Vi ser, at x_2 og x_3 er frie variable. Vi sætter $x_2 = s$ og $x_3 = t$. Hermed har vi

$$x = \begin{bmatrix} 1 - s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $s, t \in R$.

Opgave 3

Der er i Maple indtastet en matrix A, men vi får ikke matricen at se. Derefter er følgende kommandoer indtastet:

```
with(LinearAlgebra):
A.<1,1,-2>, NullSpace(A-2);
```

og Maple viser resultatet

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

På dette grundlag skal vi besvare de følgende spørgsmål.

1. Vi skal angive egenværdierne for A og samtlige de dertil hørende egenvektorer.
   Da vi kan aflæse, at

   $$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   ser vi, at 5 er egenværdi og vektoren $[1, 1, 5]^T$ en egenvektor hørende til 5. Da nulrummet for matricen $A - 2I$ åbenbart har basis givet ved

   $$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   konkluderer vi, at 2 er egenværdi. Samtlige egenvektorer hørende til egenværdien 2 er

   $$s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   hvor $s, t \in R$ (ikke begge nul, dog). Samtlige egenvektorer hørende til egenværdien 5 er

   $$t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   hvor $t \in R \setminus \{0\}$. Da A er en 3×3-matrix og da summen af de geometriske multipliciteter af de fundne egenværdier er $1 + 2 = 3$, kan der ikke være flere egenværdier!

2. Den ukendte matrix A er diagonaliserbar, da den har 3 lineært uafhængige egenvektorer. Med

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

har vi nu $P^{-1}AP = D$.

3. Matricen A kan findes ud fra $P^{-1}AP = D$. Vi finder ved multiplikation fra venstre med P og fra højre med P^{-1} at

$$PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1}$$

altså $A = PDP^{-1}$.

En konkret bestemmelse skal ikke foretages, men ellers ville denne primært bestå i bestemmelsen af P^{-1}. For god ordens skyld anfører vi dog i denne løsning P^{-1}:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ -12 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Opgave 4

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 3x' + 2x = 10e^{-2t} \qquad (*)$$

1. Vi skal bestemme den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.
Karakterligningen er $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, der har rødderne -2 og -1. Den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning er derfor givet ved

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

2. Der er netop én løsning til (*), der har formen $x(t) = x_p(t) = Ate^{-2t}$, hvor A er en konstant. Vi skal bestemme denne løsning og dernæst angive den fuldstændige løsning til (*).
Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} \\ x_p''(t) &= -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t} \end{aligned}$$

således at indsættelse giver

$$\left(-4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}\right) + 3\left(Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}\right) + 2\left(Ate^{-2t}\right) = 10e^{-2t}$$

Ved reduktion fås

$$-Ae^{-2t} = 10e^{-2t}$$

Heraf følger, at $A = -10$, således at $x_p(t) = -10te^{-2t}$. Den fuldstændige løsning til (*) er så

$$x(t) = -10te^{-2t} + c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

Opgave 5

Funktionen f er givet ved integralet

$$f(x) = \int_0^x \arctan(t + \cos t)\ dt$$

for alle $x \in R$. Vi advares mod forsøg på at udregne integralet!

1. Vi skal finde det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0 for f .
   Vi har
   $$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$
   Vi har åbenbart, at $f(0) = 0$ og
   $$f'(x) = \arctan(x + \cos x)$$
   så $f'(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Videre finder vi
   $$f''(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + (x + \cos x)^2}$$
   så $f''(0) = \frac{1}{2}$. Hermed har vi
   $$P_2(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{4}x^2$$

2. Vi får oplyst, at
   $$\left|\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right| \leq 1$$
   for alle $x \geq 0$ og skal bruge denne oplysning til (ved hjælp af Taylors formel) at vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_2(x)$, når $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
   Vi har for $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:
   $$|f(x) - P_2(x)| = \left|\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3\right| \leq \frac{1}{3!}|x|^3 \leq \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48} \cong 0.021$$

Opgave 6

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x^2y - x^2 + \frac{1}{3}y^3 - y^2$$

Vi skal finde de stationære punkter for f, og for hvert af dem bestemme, om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt.
Vi finder

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy-2x = 2x(y-1) \\ f_y(x,y) &= x^2+y^2-2y \end{aligned}$$

Hermed fås

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (0,0) \Leftrightarrow (x=0 \vee y=1) \wedge \left(x^2+y^2-2y=0\right) \\ &\Leftrightarrow (x,y)=(0,0) \vee (x,y)=(0,2) \vee (x,y)=(\pm 1,1) \end{aligned}$$

De stationære punkter er altså $(0,0)\,,(0,2)$ og $(\pm 1,1)$. Hesse-matricen er

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y-2 & 2x \\ 2x & 2y-2 \end{bmatrix}$$

Hermed har vi

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne er åbenbart -2 og -2, altså begge negative: $(0,0)$ er et egentligt lokalt maksimumspunkt. Videre

$$H(0,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Egenværdierne er åbenbart 2 og 2, altså begge positive: $(0,0)$ er et egentligt lokalt minimumspunkt. Videre

$$H(\pm 1,1) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{bmatrix}$$

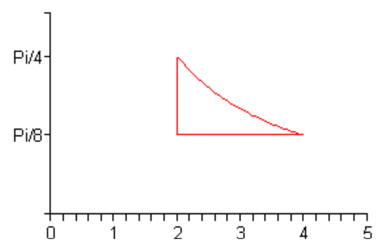
Determinanten (for begge) er $-4 < 0$. Dvs. at punkterne $(\pm 1,1)$ begge er (egentlige) saddelpunkter.

Opgave 7

Der er givet dobbeltintegralet

$$\int_2^4 \left(\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2x}} y\cos(xy)\,dy \right) dx$$

Dobbeltintegralet er lig med planintegralet $\iint_S y\cos(xy)\,dA$ over området S, der er vist på figuren:



Vi skal omskrive planintegralet

$$\iint\limits_S y\cos(xy)\,dA$$

til et dobbeltintegral med omvendt integrationsorden. Vi finder

$$\iint\limits_S y\cos(xy)\,dA = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_2^{\frac{\pi}{2y}} y\cos(xy)\,dx\right) dy$$

Udregningen:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_2^{\frac{\pi}{2y}} y\cos(xy)\,dx\right) dy &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin(xy)]_2^{\frac{\pi}{2y}}\,dy = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin(2y))\,dy \\ &= \left[y+\frac{1}{2}\cos(2y)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Det i opgaven givne dobbeltintegral kan dog også udregnes, men det er langt sværere:

$$\begin{aligned}\int_2^4 \left(\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2x}} y\cos(xy)\,dy\right) dx &= \int_2^4 \left[\left(\frac{\cos(xy)}{x^2}+\frac{y\sin(xy)}{x}\right)\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2x}} dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{\pi}{2x^2}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{x^2}-\frac{\pi\sin\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{8x}\right) dx \\ &= \left[-\frac{\pi}{2x}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right)}{x}\right]_2^4 = \frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$