Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
MAT 01905

Onsdag den 8. december 2004, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 7
Tilladte hjælpemidler: Alle.
Vægtning: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

Opgave 1 (10 point).

Løs ligningen

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right) z^4 + 32 = 0$$

og indtegn røddernes placering i den komplekse plan sammen med den cirkel hvorpå rødderne ligger. Rødderne skal angives på rektangulær form.

Opgave 2 (15 point).

Givet ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 2a-1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & a \\ ax_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & -a+2 \end{array}$$

1. Vis, at for $a \neq \pm 1$ har systemet netop én løsning, og bestem denne løsning.
2. Løs ligningssystemet for $a = -1$ og for $a = 1$.

Opgave 3 (15 point).

Der er i Maple indtastet en matrix A, men vi får ikke matricen at se. Derefter er følgende kommandoer indtastet:

```
with(LinearAlgebra):
A.<1,1,-2>, NullSpace(A-2);
```

og Maple viser resultatet

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

På dette grundlag skal man besvare følgende spørgsmål.

1. Angiv egenværdierne for A og samtlige de dertil hørende egenvektorer.
2. Forklar hvorfor den ukendte matrix A er diagonaliserbar, og angiv en diagonalmatrix D og en dertil hørende diagonaliserende matrix P, der opfylder $D = P^{-1}AP$.
3. Forklar hvordan matricen A kan bestemmes ud fra D og P. Selve udregningen af A ønskes dog ikke udført.

Opgave 4 (15 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 3x' + 2x = 10e^{-2t} \tag{*}$$

1. Bestem den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ligning.
2. Der er netop én løsning til (*), der har formen $x(t) = x_p(t) = Ate^{-2t}$, hvor A er en konstant. Bestem denne løsning. Angiv dernæst den fuldstændige løsning til (*).

Opgave 5 (15 point).

Funktionen f er givet ved integralet

$$f(x) = \int_0^x \arctan(t + \cos t)\ dt$$

for alle $x \in R$. Forsøg ikke på at udregne integralet: Det vil ikke lykkes!

1. Find det 2. Taylorpolynomium P_2 med udviklingspunkt 0 for f.
2. Det oplyses, at
$$\left| \frac{d^3}{dx^3} f(x) \right| \leq 1$$
for alle $x \geq 0$. Brug denne oplysning til ved hjælp af Taylors formel at vurdere den fejl, der begås ved at erstatte $f(x)$ med $P_2(x)$, når $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Opgave 6 (15 point).

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = x^2y - x^2 + \frac{1}{3}y^3 - y^2$$

Find de stationære punkter for f, og bestem for hvert af dem, om det er et lokalt maksimum, et lokalt minimum eller et saddelpunkt.

Opgave 7 (15 point).

Dobbeltintegralet

$$\int_2^4 \left(\int_{\pi/8}^{\pi/(2x)} y \cos(xy)\, dy \right) dx \tag{**}$$

kan skrives som et planintegral $\iint_S y \cos(xy)\, dA$ over et område S i xy-planen.

1. Skitsér området S.
2. Omskriv planintegralet $\iint_S y \cos(xy)\, dA$ til et dobbeltintegral med integrationsorden modsat integrationsordenen i (**). Udregn det fundne dobbeltintegral.