DiploMat 01905

Preben Alsholm

8. december 2003

Opgave 1

Der er givet ligningen

$$e^{i\frac{\pi}{3}} z^4 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 \tag{1}$$

Vi skal vise, at ligning (1) er ensbetydende med ligningen

$$z^4 = -4 \tag{2}$$

og derpå løse ligning (2).

Vi finder

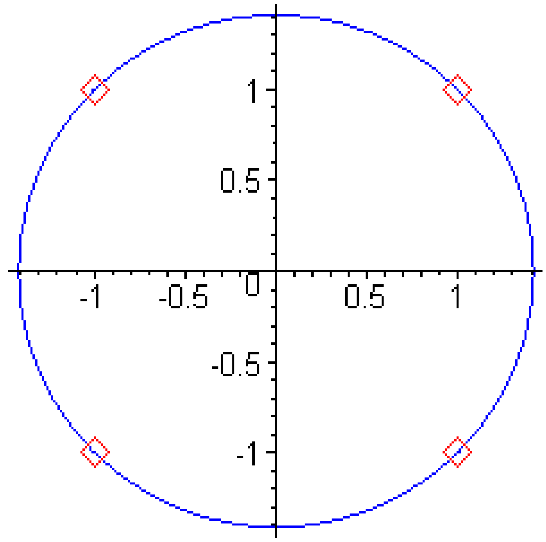
$$z^4 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2 e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4e^{-i\pi} = -4$$

Ligningen (2) er en binom ligning, der også kan skrives $z^4 = 4e^{i\pi}$. Løsningerne er givet ved

$$z_p = \sqrt[4]{4} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right)}$$

hvor $p = 0, 1, 2, 3$. Vi finder altså

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 1 + i \\
z_1 &= \sqrt{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i \\
z_2 &= -z_0 = -1 - i \\
z_3 &= \overline{z_0} = 1 - i
\end{aligned}$$



Opgave 2

Der er givet den lineære differentialligning

$$x'' + 7x' + 10x = 130\sin t$$

Vi skal først finde den fuldstændige løsning og dernæst den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$x(0) = -7, x'(0) = 0$$

Den tilsvarende homogene ligning er $x''+7x'+10x = 0$, og den har konstante koefficienter. Karakterligningen er $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$. Rødderne her i er -5 og -2. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor

$$x(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-2t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

En ansats til en løsning af den inhomogene ligning er $x_p(t) = A\sin t + B\cos t$. Ved differentiation fås

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= A\cos t - B\sin t \\ x_p''(t) &= -A\sin t - B\cos t \end{aligned}$$

Ved indsættelse i differentialligningen fås:

$$(-A\sin t - B\cos t) + 7(A\cos t - B\sin t) + 10(A\sin t + B\cos t) = 130\sin t$$

Ved omordning fås

$$\sin t \cdot (9A - 7B) + \cos t \cdot (7A + 9B) = 130\sin t$$

Da dette skal gælde for alle $t \in R$ må vi derfor forlange, at

$$\begin{aligned} 9A - 7B &= 130 \\ 7A + 9B &= 0 \end{aligned}$$

Heraf fås $A = 9$ og $B = -7$. Altså $x_p(t) = 9\sin t - 7\cos t$, hvorfor den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er

$$x(t) = 9\sin t - 7\cos t + c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-2t}$$

hvor $c_1, c_2 \in R$.

Begyndelsesbetingelserne $x(0) = -7, x'(0) = 0$ skal nu bruges til at bestemme konstanterne c_1, c_2. Vi finder ved indsættelse af $t = 0$ i den fuldstændige løsning, at

$$-7 = x(0) = -7 + c_1 + c_2$$

altså $c_1 + c_2 = 0$. Ved differentiation af $x(t)$ fås

$$x'(t) = 9\cos t + 7\sin t - 5c_1 e^{-5t} - 2c_2 e^{-2t}$$

Ved indsættelse af $t = 0$ fås

$$0 = x'(0) = 9 - 5c_1 - 2c_2$$

Altså $5c_1 + 2c_2 = 9$. Denne ligning skal løses sammen med $c_1 + c_2 = 0$. Vi finder $c_1 = 3, c_2 = -3$, så den søgte løsning er

$$x(t) = 9\sin t - 7\cos t + 3e^{-5t} - 3e^{-2t}$$

Opgave 3

Funktionen f er givet ved forskriften

$$f(x, y) = e^x y + x e^y$$

for alle $(x, y) \in R^2$. Vi skal vise, at $(-1, -1)$ er et stationært punkt for f, og undersøge om det er et lokalt minimums- eller maksimumspunkt.

Vi finder de partielle afledede

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x y + e^y \\ f_y(x, y) &= e^x + x e^y \end{aligned}$$

Ved indsættelse af $(x, y) = (-1, -1)$ fås:

$$\begin{aligned} f_x(-1, -1) &= -e^{-1} + e^{-1} = 0 \\ f_y(-1, -1) &= e^{-1} - e^{-1} = 0 \end{aligned}$$

Så $(-1, -1)$ er et stationært punkt for f. Vi skal undersøge typen. Vi finder

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= e^x y \\ f_{xy}(x, y) &= e^x + e^y \\ f_{yy}(x, y) &= x e^y \end{aligned}$$

Hessematricen

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x y & e^x + e^y \\ e^x + e^y & x e^y \end{pmatrix}$$

i punktet $(-1,-1)$ er derfor

$$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Egenværdierne er rødderne i polynomiet

$$\det(H(-1,-1) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -e^{-1} - \lambda & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda e^{-1} - 3e^{-2}$$

Egenværdierne er e^{-1} og $-3e^{-1}$. Den ene er positiv og den anden er negativ, så $(-1,-1)$ er et (egentligt) saddelpunkt.

Opgave 4

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ -16 & -1 & 8 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Vi skal, at vektorerne u og v givet ved

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er egenvektorer for A og angiv de tilhørende egenværdier λ_1 og λ_2. Vi finder

$$\begin{aligned} Au &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ -16 & -1 & 8 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7u \\ Av &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ -16 & -1 & 8 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v \end{aligned}$$

så egenværdien hørende til u er 7 og egenværdien hørende til v er -1.

Vi skal finde samtlige egenværdier for A. Der kan højst være én mere. Vi kan evt. udnytte, at

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = spor(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 13 - 1 - 5 = 7$$

så

$$\lambda_3 = 7 - (\lambda_1 + \lambda_2) = 7 - (7 - 1) = 1$$

Vi kunne også have fundet $\det(A-\lambda I)$:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 13-\lambda & 0 & -6 \\ -16 & -1-\lambda & 8 \\ 12 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} &= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 13-\lambda & -6 \\ 12 & -5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\left(\lambda^2-8\lambda+7\right) = (\lambda+1)(7-\lambda)(\lambda-1)\end{aligned}$$

hvoraf egenværdierne findes som rødderne.

Vi skal finde samtlige egenvektorer hørende til den tredie egenværdi $\lambda_3 = 1$. Disse egenvektorer v er løsninger til ligningen $(A-I)v = 0$. Totalmatricen hørende hertil er

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 \\ -16 & -2 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

der ved rækkeoperationerne $R_3 := R_3 + R_1$, $R_1 := \frac{1}{6}R_1, R_2 := R_2 + 8R_1$ successivt omformes til

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 \\ -16 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -16 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet svarende til den sidste er $2v_1 - v_3 = 0$ og $v_2 = 0$. Vi sætter $v_3 = 2t$. Så fås

$$v = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

hvor $t \neq 0$.

Matricen A kan diagonaliseres, da egenværdierne er forskellige. En diagonalmatrix D og en diagonaliserende matrix P, så $D = P^{-1}AP$ er givet ved

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 5

Vi skal finde det 4. Taylorpolynomium P_4 med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen

$$x''(t) + tx'(t) + (t+1)\,x(t) = 0$$

der opfylder $x(0) = 1$ og $x'(0) = 0$.

Dette polynomium er givet ved

$$P_4(t) = x(0) + x'(0)\,t + \frac{1}{2}x''(0)\,t^2 + \frac{1}{3!}x'''(0)\,t^3 + \frac{1}{4!}x^{(4)}(0)\,t^4$$

Vi kender jo allerede $x(0)$ og $x'(0)$. Vi kan bestemme $x''(0)$ ved brug af differentialligningen med $t = 0$:

$$x''(0) + x(0) = 0$$

Altså fås $x''(0) = -x(0) = -1$. Ved differentiation af differentialligningen fås

$$x'''(t) + x'(t) + tx''(t) + x(t) + (t+1)x'(t) = 0$$

der kan skrives

$$x'''(t) + tx''(t) + x(t) + (t+2)x'(t) = 0$$

Indsættelse af $t = 0$ giver

$$x'''(0) + x(0) + 2x'(0) = 0$$

hvoraf fås, at $x'''(0) = -x(0) - 2x'(0) = -1$. Fornyet differentiation giver

$$x^{(4)}(t) + x''(t) + tx'''(t) + x'(t) + x'(t) + (t+2)x''(t) = 0$$

Indsættelse af $t = 0$ giver

$$x^{(4)}(0) + x''(0) + 2x'(0) + 2x''(0) = 0$$

hvoraf fås $x^{(4)}(0) = -3x''(0) - 2x'(0) = 3$. Altså finder vi

$$P_4(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{8}t^4$$

Opgave 6

Vi skal udregne planintegralet

$$\int_S (1 + 2y\cos x)\, dA$$

hvor S er området i planen givet ved

$$S = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \wedge 0 \le y \le \sin x \right\}$$

Vi finder

$$\begin{aligned}
\int_S (1 + 2y\cos x)\, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sin x} (1 + 2y\cos x)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[y + y^2 \cos x \right]_0^{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \sin^2 x \cos x \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx \\
&= \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$