Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
MAT 01905

mandag den 8. december 2003, kl. 9.00 - 13.00

Antal opgaver: 6
Hjælpemidler: Alle.
Bedømmelse: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol. På kuverten bedes skrevet retning (B, E, IT, K eller M), klasse samt klasselærerens navn.

Opgave 1 (15 point).

Der er givet ligningen

$$e^{i\frac{\pi}{3}}z^4 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^2 \tag{1}$$

Vis, at ligning (1) er ensbetydende med ligningen

$$z^4 = -4 \tag{2}$$

og løs derefter ligning (2). Løsningerne ønskes angivet på rektangulær form, dvs. på formen $x + iy$, hvor $x, y \in R$. Vis på en figur løsningernes placering i den komplekse plan.

Opgave 2 (20 point).

Der er givet differentialligningen

$$x'' + 7x' + 10x = 130 \sin t$$

1. Find den fuldstændige løsning.

2. Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$x\left(0\right) = -7, x'\left(0\right) = 0$$

Opgave 3 (20 point).

Lad f være funktionen givet ved forskriften

$$f(x,y) = e^x y + x e^y$$

for alle $(x,y) \in R^2$. Vis, at $(-1,-1)$ er et stationært punkt for f, og undersøg om det er et lokalt minimums- eller maksimumspunkt.

Opgave 4 (20 point).

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -6 \\ -16 & -1 & 8 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Vis, at vektorerne u og v givet ved

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   er egenvektorer for A og angiv de tilhørende egenværdier λ_1 og λ_2.

2. Find samtlige egenværdier for A.
3. Find samtlige egenvektorer hørende til den tredie egenværdi λ_3.
4. Vis, at A kan diagonaliseres og angiv en diagonalmatrix D og en diagonaliserende matrix P, så $D = P^{-1}AP$.

Opgave 5 (15 point).

Find det 4. Taylorpolynomium P_4 med udviklingspunkt 0 for den løsning til differentialligningen

$$x''(t) + tx'(t) + (t+1)\,x(t) = 0$$

der opfylder $x(0) = 1$ og $x'(0) = 0$.

Opgave 6 (10 point).

Udregn planintegralet

$$\iint_S (1 + 2y\cos x)\, dA$$

hvor S er området i planen givet ved

$$S = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \wedge 0 \le y \le \sin x \right\}$$