MAT 01905 DiploMat
Løsninger

Preben Alsholm

Oktober 2003

Opgave 1

Vi skal løse ligningen

$$z^3 = 8i$$

Løsningerne skal angives på rektangulær form, dvs. på formen $x + iy$, hvor $x, y \in R$.

Ligningen er binom. Vi skriver højresiden på polær form

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Så vi finder

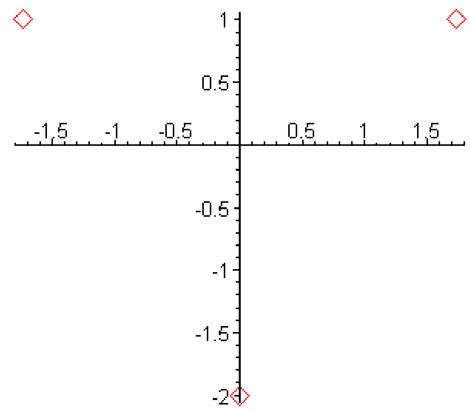
$$z = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad p = 0, 1, 2$$

altså

$$z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+p\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad p = 0, 1, 2$$

Vi omskriver til rektangulær form:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i \\
z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + +i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + +i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i \\
z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + +i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + +i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i
\end{aligned}$$



Opgave 2

Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 5x_2 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Totalmatricen er

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + 3R_1, R_3 := R_3 - 4R_1$ giver matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -6 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & -15 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_3 := R_3 + \frac{1}{2}R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -6 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på echelonform. Vi ser, at ligningssystemet har præcis én løsning. For at bestemme den går vi videre med reduktionen. Rækkeoperationerne $R_3 := -R_3, R_2 := -\frac{1}{2}R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 3R_3, R_1 := R_1 + 2R_3$ giver matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Til sidst giver rækkeoperationen $R_1 := R_1 - R_2$ matricen på reduceret echelonform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Heraf aflæses løsningen til

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Der er givet vektorerne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Vi skal undersøge, om vektorerne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 er lineært uafhængige. Vi kan nøjes med at henvise til, at der er 5 vektorer fra R^4. De må nødvendigvis være lineært afhængige. Iøvrigt vil dette resultat også følge af svaret på næste spørgsmål, der viser, at $Ax = 0$ har ikke-trivielle løsninger.

2. Vi sætter $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5]$. Vi skal løse det homogene ligningssystem $Ax = 0$. Vi opskriver totalmatricen:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_3 := R_2 - 2R_1, R_4 := R_4 + 5R_1$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricen er nu på echelonform, men vi fortsætter reduktionen. Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 + 4R_3, R_1 := R_1 + 4R_3$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 14 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_1 := R_1 + R_2$ giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 26 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 12 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Endelig giver $R_2 := -\frac{1}{2}R_2$ matricen på reduceret echelonform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 26 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basale variable er x_1, x_2, x_3 og frie variable er x_4, x_5. Det tilsvarende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 26x_4 + 12x_5 &= 0 \\ x_2 - 6x_4 - 4x_5 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Idet vi sætter $x_5 = t_1, x_4 = t_2$ fås løsningerne til

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12t_1 - 26t_2 \\ 4t_1 + 6t_2 \\ -t_1 - 3t_2 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -26 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hvor $t_1, t_2 \in R$.

3. En basis for nulrummet for A består af vektorerne

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -26 \\ 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da disse åbenbart udspænder nulrummet ifølge resultatet ovenfor, og da de to vektorer er lineært uafhængige, hvilket tydeligst fremgår ved at betragte elementerne på 4. og 5. pladserne.

Opgave 4

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 30 & -10 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 18 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Vi skal vise, at vektoren v givet ved

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor for A, og finde den tilhørende egenværdi. Vi har

$$Av = \begin{pmatrix} 7 & 30 & -10 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 18 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2v$$

Altså er v egenvektor for A og den tilhørende egenværdi er 2.

2. Det oplyses, at $\det(A - \lambda I) = -(\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-4)$. Egenværdierne for A er rødderne i det givne polynomium. Altså er de $-3, 2$ og 4.

3. Vi skal finde samtlige egenvektorer hørende til den største af egenværdierne, dvs. 4. Egenvektorerne v er løsning til ligningen $(A - 4I)\,v = 0$. Totalmatricen for dette system er

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 30 & -10 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ -1 & 18 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_3 \longleftrightarrow R_1, R_2 := R_2 - 2R_1, R_3 := R_3 + 3R_1$ giver omformningerne

$$T \to \begin{pmatrix} -1 & 18 & -6 & 0 \\ -2 & -6 & 2 & 0 \\ 3 & 30 & -10 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 18 & -6 & 0 \\ 0 & -42 & 14 & 0 \\ 0 & 84 & -28 & 0 \end{pmatrix}$$

Herefter giver $R_3 := R_3 + 2R_2$ og $R_2 := -\frac{1}{42}R_2, R_1 := -R_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 18 & -6 & 0 \\ 0 & -42 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -18 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Til slut giver $R_1 := R_1 + 18R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dvs. at $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ opfylder

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 - \frac{1}{3}v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sættes den frie parameter v_3 til $3t$ fås

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

hvor $t \neq 0$.

Opgave 5

Vi skal finde løsningen til differentialligningen

$$x' + 4x = 7e^{3t}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 6$.

Differentialligningen er lineær og allerede normeret. Vi bruger Panserformlen:

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\, dt + Ce^{-P(t)}$$

Her er

$$P(t) = \int p(t)\, dt = \int 4dt = 4t$$

således at den fuldstændige løsning er givet ved

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-4t} \int e^{4t} 7e^{3t} dt + Ce^{-4t} = e^{-4t} \int 7e^{7t} dt + Ce^{-4t} \\ &= e^{-4t} e^{7t} + Ce^{-4t} = e^{3t} + Ce^{-4t} \end{aligned}$$

hvor $C \in R$ er en arbitrær konstant. Denne skal nu bestemmes ud fra begyndelsesbetingelsen $x(0) = 6$. Vi har

$$6 = x(0) = e^0 + Ce^0 = 1 + C$$

så $C = 5$. Løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er dermed fundet til

$$x(t) = e^{3t} + 5e^{-4t}$$