DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig prøve i Matematik
MAT 01905

fredag den 10. oktober 2003, kl. 15.00 - 17.00

Antal opgaver: 5
Hjælpemidler: Alle.
Bedømmelse: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner eller computer må kun benyttes til kontrol.

Opgave 1 (20 point).

Løs ligningen

$$z^3 = 8i$$

Løsningerne ønskes angivet på rektangulær form, dvs. på formen $x + iy$, hvor $x, y \in R$. Vis på en figur løsningernes placering i den komplekse plan.

Opgave 2 (20 point).

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -3x_1 - 5x_2 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 13 \end{aligned}$$

Opgave 3 (20 point).

Der er givet vektorerne

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Undersøg, om vektorerne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 er lineært uafhængige.
2. Lad matricen A være givet ved $A = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5]$. Løs det homogene ligningssystem $Ax = 0$.
3. Find en basis for nulrummet for A.

Opgave 4 (20 point).

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 30 & -10 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 18 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Vis, at vektoren v givet ved

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   er en egenvektor for A, og find den tilhørende egenværdi.

2. Det oplyses, at $\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 3)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Angiv alle egenværdierne for A.

3. Find samtlige egenvektorer hørende til den største af egenværdierne.

Opgave 5 (20 point).

Find løsningen til differentialligningen

$$x' + 4x = 7e^{3t}$$

med begyndelsesbetingelsen $x(0) = 6$.