Løsninger til totimersprøven i DiploMat

Preben Alsholm

Marts 2004

1 Opgave 1

Vi skal finde løsningerne til ligningen

$$z^3 = \frac{i\sqrt{2}}{1-i}$$

Løsningerne skal angives på polær form, dvs. på formen r_v eller re^{iv}, hvor $r > 0$ og $v \in R$.

Vi har

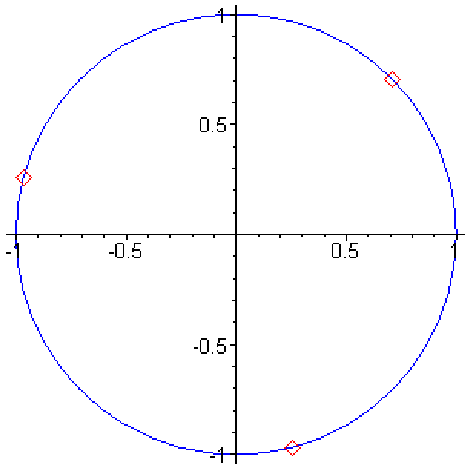
$$\frac{i\sqrt{2}}{1-i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Så vi finder derfor

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{2\pi}{3}\right)}$$

hvor $p = 0, 1, 2$. Vi har med andre ord løsningerne

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{12}} \\ z_2 &= e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{19\pi}{12}} = e^{-i\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$



2 Opgave 2

Der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ a & a & a & 2 \end{bmatrix}$$

Det oplyses, at

$$\det A = 2 - 2a$$

Der gælder, at systemet $Ax = 0$ kun har nulløsningen hvis og kun hvis $\det A \neq 0$. Dette er åbenbart netop tilfældet hvis og kun hvis $a \neq 1$.

Vi skal nu løse ligningssystemet $Ax = 0$ for $a = 1$. Totalmatricen er

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 14 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - R_1, R_3 := R_3 - 5R_1, R_4 := R_4 - R_1$ giver matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Herefter giver rækkeoperationen $R_3 := R_3 - R_2$ matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricen er nu på echelonform. Vi kan se, at x_1, x_2, x_3 er basale variable og at x_4 er fri. Vi fortsætter reduktionen. Rækkeoperationerne $R_2 := R_2 - 2R_3, R_1 := R_1 - R_3$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endelig giver rækkeoperationen $R_1 := R_1 - R_2$ matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystem er

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - 2x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Med $x_4 = t$ fås

$$x = t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in R$.

3 Opgave 3

Der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi får at vide at matricen $T = [A|I]$ altså

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ved Gausselimination reduceres til matricen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi skal med udgangspunkt i disse oplysninger bestemme den inverse matrix A^{-1}. Vi skal reducere helt til reduceret echelonform: Vi begynder med rækkeoperationerne $R_1 := -R_1, R_2 := -R_2, R_4 := -R_4$. Herved opnås matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rækkeoperationen $R_1 := R_1 + R_4$ giver

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Endelig giver rækkeoperationen $R_1 := R_1 + R_2$ matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har nu opnået matricen $\left[I|A^{-1}\right]$ dvs, at A^{-1} er givet ved

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Til slut løser vi ligningssystemet $Ax = b$, når

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ved brug af A^{-1}:

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

4 Opgave 4

Der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi får at vide, at karakterpolynomiet kan skrives på formen

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$$

Heraf ser vi, at egenværdierne for A er $1, 2$ og 3, den sidste med algebraisk multiplicitet 2. Desuden får oplyst baser for egenrummene. Bl.a. får vi at vide, at en basis for egenrummet hørende til egenværdien 3 er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Dermed består egenrummet netop af vektorerne

$$s \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hvor $s, t \in R$. Vektoren

$$7 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er altså en egenvektor for A hørende til egenværdien 3.

Matricen A er diagonaliserbar, da den algebraiske multiplicitet er lig med den geometriske multiplicitet for alle 3 egenværdier. Vi kan bruge basisvektorerne fra egenrummene til at danne en diagonaliserende matrix P:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har nu, at $A = PDP^{-1}$, når

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5 Opgave 5

Der er givet differentialligningen

$$\left(t^2 + 1\right) x'(t) - x(t) = 2$$

Vi skal finde den fuldstændige løsning. Ligningen er lineær. Vi normerer den:

$$x' - \frac{1}{t^2+1} x = \frac{2}{t^2+1}$$

Vi bruger nu Panserformlen

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\, dt + Ce^{-P(t)}$$

der forudsætter, at differentialligningen har formen $x' + p(t)\, x = q(t)$. Vi finder

$$P(t) = \int -\frac{1}{t^2+1} dt = -\arctan t$$

Hermed har vi

$$x(t) = e^{\arctan t} \int e^{-\arctan t} \frac{2}{t^2+1} dt + Ce^{\arctan t}$$

Med substitutionen $u = \arctan t, \quad du = \frac{1}{1+t^2} dt$ fås

$$\int e^{-\arctan t} \frac{2}{t^2+1} dt = 2 \int e^{-u} du = -2e^{-u} = -2e^{-\arctan t}$$

altså har vi

$$x(t) = e^{\arctan t} \left(-2e^{-\arctan t}\right) + Ce^{\arctan t} = -2 + Ce^{\arctan t}$$

hvor $C \in R$.

Vi skal også bestemme den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = -1$. Ved indsættelse fås

$$-1 = x(0) = -2 + Ce^{\arctan 0} = -2 + Ce^0 = -2 + C$$

Heraf fås $C = 1$, hvorfor løsningen der opfylder begyndelsesbetingelsen er givet ved

$$x(t) = -2 + e^{\arctan t}$$