Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve i Matematik
MAT 01905

fredag den 12. marts 2004, kl. 13.30 - 15.30

Antal opgaver: 5
Hjælpemidler: Alle.
Bedømmelse: Opgaverne vægtes som anført ved hver enkelt opgave.
Supplerende oplysninger: Mellemregninger skal anføres i rimeligt omfang. Lommeregner og computer må kun benyttes til kontrol, dog må de gerne benyttes til udregning af differentialkvotienter og ubestemte integraler.

Opgave 1 (20 point).

Find løsningerne til ligningen

$$z^3 = \frac{i\sqrt{2}}{1-i}$$

Løsningerne ønskes angivet på polær form, dvs. på formen r_v eller re^{iv}, hvor $r > 0$ og $v \in R$. Vis på en figur løsningernes placering i den komplekse plan.

Opgave 2 (20 point).

Der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 14 \\ a & a & a & 2 \end{bmatrix}$$

Det oplyses, at

$$\det A = 2 - 2a$$

1. Angiv på basis af denne oplysning de værdier af konstanten a for hvilke ligningssystemet $Ax = 0$ kun har den trivielle løsning.
2. Løs ligningssystemet $Ax = 0$ for den værdi af a for hvilken systemet har andre løsninger end den trivielle.

Opgave 3 (20 point).

I forbindelse med bestemmelsen af den inverse til en 4×4-matrix A er der i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
with(LinearAlgebra):
A:=Matrix([[-1, 1, 0, 1], [-2, 2, 0, 1], [0, 0, 1, 0], [-2, 1, 0, 2]]):
Totalmatrix:=<A|IdentityMatrix(4)>;
G:=GaussianElimination(Totalmatrix);
```

og Maple viser resultaterne

$$Totalmatrix := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Med udgangspunkt i disse oplysninger ønskes den inverse matrix A^{-1} bestemt.

2. Løs ligningssystemet $Ax = b$, når

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

   gerne ved brug af A^{-1}.

Opgave 4 (20 point).

Der er i Maple indtastet følgende kommandoer:

```
with(LinearAlgebra):
A:=Matrix([[1, 2, 2, -4], [4, 2, -2, 4], [0, 0, 3, 0], [4, 2, 0, 3]]):
CharacteristicPolynomial(A,lambda):
factor(%);
NullSpace(A-1), NullSpace(A-2), NullSpace(A-3);
```

og Maple viser resultaterne

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \left\{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

På grundlag af disse oplysninger skal man besvare de følgende spørgsmål.

1. Angiv egenværdierne for matricen A.
2. Er vektoren
$$7\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
egenvektor for A? Begrund svaret!
3. Forklar hvorfor A er diagonaliserbar. Angiv en diagonalmatrix D og en diagonaliserende matrix P, så $A = PDP^{-1}$.

Opgave 5 (20 point).

Der er givet differentialligningen

$$\left(t^2+1\right)x'(t) - x(t) = 2$$

1. Find den fuldstændige løsning.
2. Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = -1$.