Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Varmeledning

Opgave.

Opgaven går ud på at opstille en matematisk model til beregning temperaturforløbet i luften inde i en flamingokasse, der opvarmes med en elektrisk pære.

Termodynamisk system.

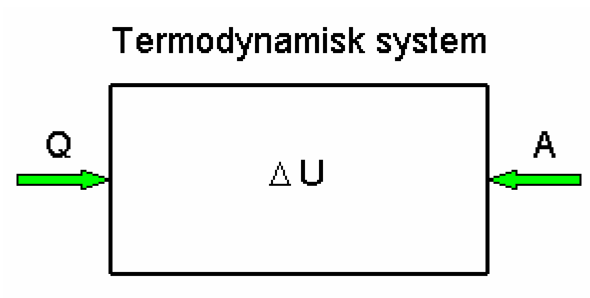
Et termodynamisk system er et system, der kan udveksle varme med omgivelserne.
Den indre energi (den mikroskopiske energi) U i et termodynamisk system er et udtryk for den indre kinetiske energi[1] af de enkelte partikler (atomer, molekyler). Et udtryk eller mål for den indre energi U i systemet er temperaturen[2] T. Der er en sammenhæng[1] imellem varme-mængden Q og det mekaniske arbejde A . Termodynamikkens 1. hovedsætning udtrykker at for et termodynamisk system er den samlede energi er bevaret

$\Delta U = Q + A$ 1. hovedsætning ,

ΔU : tilvækst i indre energi

Q : tilført varmemængde

A : tilført mekanisk arbejde

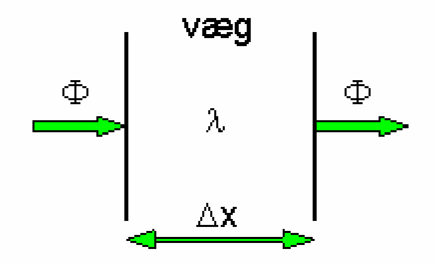


Kender vi systemets varmekapacitet C , vil en tilførsel af en lille varmemængde ΔQ give anledning til en ændring i temperaturen ΔT , som er bestemt ved

$\Delta Q = C\, d\Delta T$, kaloriemeterligningen.

Varmestrøm.

Varmestrømmen Φ gennem en væg er defineret



$$\Phi = \frac{\text{varmeængde}}{\text{tid}} = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} A$$

λ : varmeledningsevnen

ΔT : temperatur ændringen på strækningen Δx

Er temperaturforskellen mellem væggens 2 sider ($T_1 - T_2$) gælder

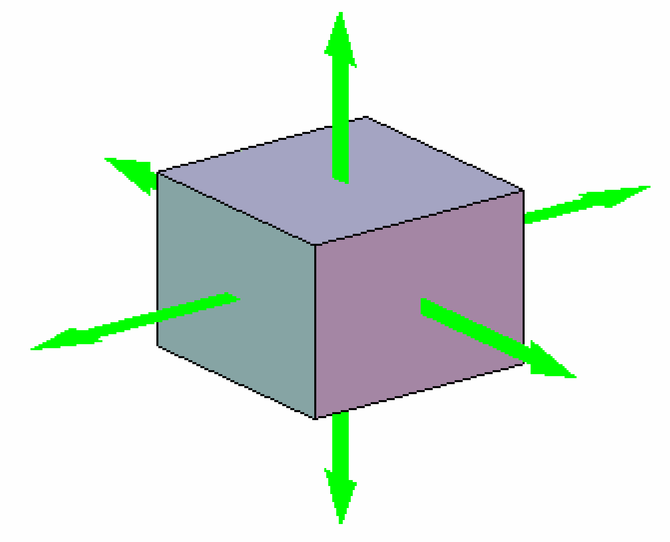
$\Phi = U A (T_1 - T_2)$,

hvor $U = \frac{\lambda}{\Delta x}$ er U-værdien eller varmeovergangstallet.

---

[1] Vi har her valgt at opfatte den indre energi som udelukkende bevægelsesenergi eller kinetisk energi. Der kan imidlertid også være tale om potentiel energi for atomerne eller molekylerne.
[2] James Joule (1818-1889), engelsk fysiker, viste i 1845 ved et forsøg, at den indre energi af en luftart kun afhænger af temperaturen T . Fandt også varmeenhedens (kalorien) mekaniske ækvivalens: 1 kcal = 427 kpm .

Spørgsmål.



Figur 1. Varmestrøm Φ fra flamingokasse

Der er givet en flamingokasse som vist i figur 1. I kassen er placeret en elektrisk pære. Kassen er fyldt med luft.

- Opstil en matematisk model til bestemmelse af temperaturforløbet T(t) inde i kassen som funktion af tiden t , når temperaturen $T(0) = T_0$ til $t = 0$ inde i kassen er den samme som temperaturen i den omgivende luft.

Hvilke fysiske parametre indgår?

Hvilke fysiske love benyttes?

Hvilke materialeligninger benyttes?

Hvad er forudsætningerne?

- Vis at $T(t) \rightarrow T_\infty$ = konstant for $t \rightarrow \infty$ og bestem T_∞ .
- Bestem T(t) og skitser temperaturforløbet.
- Hvor lang tid går der før vi måler temperaturen T_∞ i kassen, hvis vi skal være sikre på at fejlen på målingen er under 1°C ?
- Hvordan kan vi bestemme U-værdien for flamingo?

Taleksempel: Effekten af den elektriske pære er $P_0 = 60$ W .

Kassen har f.eks. dimensionen ½m × ½m × ½m , og er opbygget af flamingoplader med tykkelsen L = 2,00 cm og varmeledningsevnen $\lambda = 0{,}0410$ W/(mK)

Varmekapaciteten C af luften i kassen kan findes ud fra den specifikke varmefylde for luft $c_p = 1{,}01 \cdot 10^3$ J/(kg K). Indeks p på c angiver, at c_p er målt ved konstant lufttryk, her ved p = 1 atmosfære. For at finde varmekapaciteten C, skal vi kende massen af den indespærrede luft i kassen. Vi antager, at luftens temperatur er lig med stuetemperaturen, som ca er 20°C . Massefylden af tør luft ved normaltrykket og stuetemperatur er ca. ρ = 1,20 kg/m^3 .