Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Togopgave

Teori: Erik Øhlenschlæger, Grundlæggende Fysik 1 For Adgangskursus og HTX , Gyldendal 1993, 2. udgave, siderne 73 - 75 , 94 -95 og 116-117 .
Grundlæggende Fysik 2 For HTX Højniveau, Gyldendal 1993, 3. udgave, siderne 25 - 33 .

Synopsis.

I denne opgave vil vi studere nogle af de vigtigste forhold i forbindelse med fremføring af tog. Vi vil se på et togs bevægelse imellem to stationer i de to tilfælde, hvor afstanden imellem stationerne er forholdsvis kort (5 km) , og hvor afstanden er lidt længere (15 km) .

Vi vil beregne togets acceleration, hastighed og vejstrækning som funktion af tiden. Endvidere vil vi bestemme togets *hastighedsprofil*, som er togets hastighed som funktion af vejstrækningen.

For en given maksimal hastighed af toget vil vi beregne køretiden imellem de to stationer, samt togets brændstofforbrug

Endelig skal vi, forsøge at optimere det brændstofforbrug, der skal til for at fremføre toget imellem stationerne, når køretiden imellem stationerne er fastlagt ifølge køreplanen.

1. Indledning.

Vi tænker os toget fremført af et dieseldrevet lokomotiv med en given trækeffekt og ønsker at beregne togets forbrug af dieselolie for den givne strækning. For at gøre dette opdeles togets bevægelse imellem stationerne i 4 driftsfaser :

1. Accelerationsfasen, hvor toget sætter i gang.
2. Kørefasen, hvor toget holder en konstant fart
3. Friløbsfasen, hvor lokomotivets motor er koblet fra.
4. Bremsefasen, hvor toget bremses med konstant deceleration.

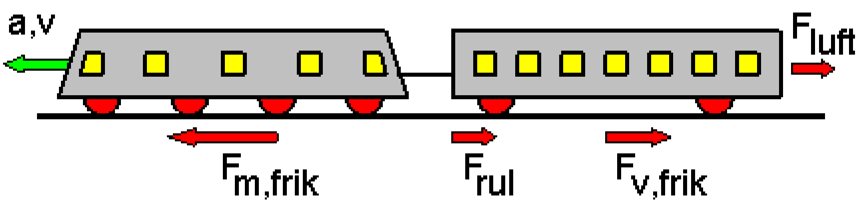
I *accelerationsfasen*, må der tages hensyn til friktionskræfterne imellem drivhjul og skinner. Hvis man vil undgå, at drivhjulene glider ved igangsætningen, kan man derfor ikke udnytte den fulde trækeffekt P_{max} af motoren. Den mindste hastighed, ved hvilken vi kan udnytte den fulde trækeffekt uden at hjulene glider, kalder vi v_{min} . Den maksimale friktionskraft er givet ved Coulombs lov og afhænger foruden lokomotivets egenvægt bl. a. af den statiske friktionskoefficient μ imellem hjul og skinner.

I *kørefasen* er togets hastighed konstant. Motorens effekt går alene til at overvinde luft- og rullemodstanden. I en simpel model, hvor vi ser bort fra luft- og rullemodstand, vil togets energiforbrug derfor være nul. Vi ser her bort fra motorens energiforbrug i tomgang.

I *friløbsfasen* er lokomotivets motor koblet fra, og toget bremses langsomt under indflydelse af luft- og rullemodstanden. Togets energiforbrug sættes til nul, idet vi igen ser bort fra motorens energiforbrug i tomgang.

I *bremsefasen* tilstræbes, at toget bremser med konstant deceleration $-a_0$, hvor vi sætter $a_0 = 1\ m/s^2$ af hensyn til passagerernes komfort. Vi regner med at toget bremser på alle vogn-hjulene. Hvis hjulene ikke skal glide under opbremsningen, stiller det krav om en mindsteværdi μ_{min} for den statiske friktionskoefficient imellem skinner og hjul. μ_{min} afhænger af a_0 og af togets samlede vægt. Under opbremsningen regner vi ligeledes med, at togets motor er koblet fra.

2. Fysisk model.



Figur 1. Togets ydre kræfter.

I dette afsnit gennemgås i korte træk den generelle fysiske model, der lægges til grund for beregningerne. Modellen opstilles på grundlag af en effektbalance. I den simple model medtages kun ændringen i den kinetiske energi af toget. I den mere komplicerede model vil vi foruden ændringen i den kinetiske energi medtage effekten af både luft- og rullemodstand. Inden vi går over til at opstille effektbalancen, skal vi først se på de ydre kræfter, der virker på en togstamme.

2.1 Ydre kræfter.

Vi betragter en togstamme, der kører på et vandret underlag, og som har den øjeblikkelige hastighed v og acceleration a , se figur 1.

Ser vi på togstammen som helhed, vil der være følgende ydre kræfter på toget

Friktionskræfter fra skinnerne hjulene: $F_{m,frik}$, $F_{v,frik}$

Rullemodstand fra skinnerne på hjulene: F_{rul}

Luftmodstand på vognene: F_{luft}

På de drivende hjul på lokomotivet vil der fra skinnerne virke en resulterende friktionskraft $F_{m,frik}$ i kørselsretningen, se figur 1 . Årsagen til denne kraft er motoren, der påvirker drivhjulene til drejning fremad. Drivhjulene vil, så at sige, prøve at skubbe skinnerne bagud. Herved påvirkes drivhjulene med en kraft i fremadgående retning. Ruller drivhjulene uden at glide vil størrelsen af $F_{m,frik}$ afhænge af togets acceleration. Glider derimod drivhjulene vil størrelsen af $F_{m,frik}$ være uafhængig af togets acceleration. $F_{m,frik}$ vil da være proportional med normalkræfterne på drivhjulene.

På passagervognene, der bliver trukket af lokomotivet, vil friktionskraften $F_{v,frik}$ fra skinnerne modvirke hjulenes bevægelse og dermed påvirke hjulene på vognene med en bagudrettet kraft.

Bremser toget, vil både $F_{m,frik}$ og $F_{v,frik}$ gå i samme retning og være modsat rettet togets hastighed.

Luftmodstanden F_{luft} opstår på grund af gnidningen imellem luften og toget. Dette giver anledning til turbulens i luften omkring toget. Luftmodstanden afhænger bl.a. af luftens viskositet og den aerodynamiske udformning af togets profil. Luftmodstanden er modsat rettet kørselsretningen, se figur 1 .

Rullemodstanden F_{rul} fremkommer ved at hjulene og skinnerne deformeres på grund af togets vægt. Rullemodstandens størrelse afhænger bl.a. af normalkræfterne på hjulene, samt de elastiske og plastiske egenskaber af hjul- og skinnemateriale. Rullemodstanden er ligeledes modsat rettet kørselsretningen , se figur 1.

Foretager hjulene en ren rulning uden at glide, vil friktionskræfterne $F_{m,frik}$ og $F_{v,frki}$ ikke udføre noget arbejde , idet kræfterne ikke flytter deres angrebspunkt ! (kræfterne angriber i det punkt, hvori hjulene rører skinnen, og hvori hastigheden er nul) . Luftmodstanden F_{luft} og rullemodstanden F_{rul} følger derimod togets bevægelse, og kræfterne flytter derved deres angrebspunkter. Da $F_{m,frik}$ og $F_{v,frki}$ er modsat rettet kørselsretningen, er deres arbejde negativt. Selvom drivhjulene glider, vil friktionskraften $F_{m,frik}$ stadig være fremadrettet, medens drivhjulenes bevægelse i forhold til skinnen er bagudrettet. Derfor vil $F_{m,firk}$ nu udføre et negativt arbejde.

Hvordan kan toget i det hele taget bevæge sig fremad, når de ydre kræfter kun udfører negativt arbejde ? Svaret er, at toget ikke er et stift legeme, men at der også må tages hensyn til de indre kræfters arbejde.

2.2 Effektbalancen.

Lokomotivets motor med tilhørende bevægelige dele frembringer et indre kraftmoment, der udfører arbejde på de bevægelige drivaksler. Arbejdet, som motoren udfører per tidsenhed, kaldes motorens effekt P_{motor} . Motoreffekten går dels til at øge den kinetiske energi E_{kin} og dels til at overvinde luft- og rullemodstanden.

Er togets hastighed v > 0 , bliver effekterne, der afsættes af kræfterne fra rulle- og luftmodstanden, henholdsvis - $F_{rul} \cdot v$ og - $F_{luft} \cdot v$. En opstilling af effektbalancen for toget giver

$$(1) \quad P_{motor} - F_{rul}\, v - F_{fuft}\, v = \frac{dE_{kin}}{dt} \quad .$$

Den kinetiske energi for toget kan udtrykkes

$$(2) \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m_{dyn}\, v^2 \quad ,$$

hvor m_{dyn} er den dynamiske masse af toget. Den dynamiske masse gør rede for rotationsenergien af hjulene, og m_{dyn} er derfor større end egenmassen eller den statiske masse m af togstammen. Indsættes (2) i ligning (1) , får vi det generelle udtryk for motoreffekten

$$(3) \quad P_{motor} = m_{dyn}\, a\, v + (F_{rul} + F_{luft})\, v \quad .$$

I den simple model, som vi skal se på i næste afsnit, vil vi se bort fra luft- og rullemodstanden.

2. 3.1 Accelerationsfasen, simpel model.

I denne model ser vi bort fra rulle- luftmodstanden. Er motorens trækeffekt P_{motor} konstant, kan vi af udtrykket (3) finde accelerationen udtrykt ved hastigheden v som

$$(4) \quad a(v) = \frac{P_{motor}}{m_{dyn}\ v} \quad .$$

Heraf ser vi, at togets accelerationen a bliver stor, når hastigheden v er lille og omvendt. Der er dog grænser for, hvor stor en acceleration vi kan opnå. Bliver kræfterne fra skinnerne på drivhjulene for store, vil hjulene glide.

Antager vi, at vi har Coulomb friktion på drivhjulene, vil den maksimale værdi, som den samlede friktionskraft F_m kan antage, være μ N , hvor μ er den statiske friktionskoefficient, og N er normalkraften på drivhjulene. Her har vi for simpelheds skyld antaget, at lokomotivets vægt er ligeligt fordelt på alle hjul, og at alle hjulene glider på samme tid. Herved får vi betingelsen for ren rulning

$$F_{m,frik} \leq \mu N = \mu\, m_m\, g \quad , \qquad \text{Coulomb friktion,}$$

hvor g = 9,82 m/s^2 er tyngdeaccelerationen og m_m er lokomotivets masse. Den største acceleration a_{max}, som vi kan opnå uden glidning, kan findes ud fra massecentersætningen. Et tilnærmet udtryk for a_{max} fås af ligningen

$$m_{dyn}\, a_{max} \cong F_{m,frik} = \mu\, m_m\, g \quad ,$$

hvor $m_{,dyn}$ er togets samlede dynamiske masse. Løser vi (10) med hensyn til a_{max} , finder vi

$$(5) \quad a_{max} \cong \mu\, g \frac{m_m}{m_{dyn}} \quad ,$$

Kalder vi den maksimale trækeffekt P_{max} , og indsætter vi udtrykket (5) for a_{max} (4) finder vi at den mindste fart v_{min} , som vi kan opnå med maksimal trækeffekt, uden at hjulene på trækakslerne glider på skinnerne, er

$$(6) \quad v_{min} \cong \frac{P_{max}}{\mu\, g\, m_m} \quad .$$

Sammenfattet har vi for accelerationsfasen i den simple model

$$(7) \quad a(v) = \begin{cases} \dfrac{P_{max}}{m_{dyn}\ v_{min}} \ , & 0 \leq v < v_{min} \ , \\[2ex] \dfrac{P_{max}}{m_{dyn}\ v} \ , & v_{min} \leq v \ . \end{cases} \quad , \quad v_{min} = \frac{P_{max}}{\mu\, g\ m_m}$$

hvor μ er den statiske friktion mellem hjul og skinner, m_{dyn} er togets samlede dynamiske masse og m_m er lokomotivets masse

Tager vi ikke hensyn til rulle- luftmodstanden, og holdes motoreffekten konstant, vil accelerationen givet følge (4) føre til at hastigheden vokser eksponentielt med tiden. Dette kan selvfølgelig ikke

være korrekt. Efterhånden som farten stiger, vil mere og mere af motoreffekten gå til at overvinde luft- og rullemodstanden, og til sidst vil toget opnå en konstant hastighed. I næste afsnit skal vi se på den mere komplicerede model, hvor vi tager hensyn til disse forhold.

2.3.2 Accelerationsfasen, kompliceret model.

Luftmodstanden F_{luft} vokser med kvadratet på farten, medens rullemodstanden F_{rul} regnes for uafhængig af farten. I litteraturen[1] finder vi den empirisk formel for den resulterende gnidningskraft på toget, som funktion af farten v

$$(8) \quad F_g = F_{luft} + F_{rul} = m_{dyn} \,(A + B\,v^2) \quad , \quad A = 14{,}73 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}\ , \quad B = 38{,}18 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^{-1}}\ ,$$

hvor m_{dyn} er togets samlede dynamiske masse. Noget af motoreffekten vil gå til at forøge den kinetiske energi og resten til at overvinde gnidningskræfternes arbejde. Indsættes (8) i ligning (1) for effektbalancen, finder vi udtrykket for motoreffekten

$$(9) \quad P_{motor} = m_{dyn}\,(a + A + B\,v^2)\, v \quad .$$

Ud fra (9) kan vi nu finde et generelt udtryk for accelerationen a(v)

$$(10) \quad a(v) = \frac{P_{motor}}{m_{dyn}\,v} - A - B\,v^2 \quad .$$

Igen gælder der, at hvis trækeffekten fastholdes, vil togets accelerationen blive meget stor, når hastigheden v er lille.

Den mindste hastighed, for hvilken vi kan have maksimal trækeffekt uden at hjulene skrider, kalder vi igen for v_{min} . For $v < v_{min}$ vil vi som tilnærmelse i denne model se bort fra luft- og rullemodstanden og samtidig benytte det tidligere fundne udtryk (6) for v_{min} .

Sammenfattet har vi for accelerationsfasen i den komplicerede model

$$(11) \quad a(v) = \begin{cases} \dfrac{P_{max}}{m_{dyn}\,v_{min}} & , \quad 0 \le v < v_{min} \ , \\[2ex] \dfrac{P_{max}}{m_{dyn}\,v} - A - B\,v^2, & v_{min} \le v \ . \end{cases} \quad , \quad v_{min} = \frac{P_{max}}{\mu\, m_m\, g} \ ,$$

hvor μ er den statiske friktion mellem hjul og skinner, m_{dyn} er togets samlede dynamiske masse , og m_m er lokomotivets masse. Konstanterne $A = 14{,}73 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$ og $B = 38{,}18 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^{-1}}$ gælder for henholdsvis rullemodstanden og luftmodstanden.

---

[1] Sachs : Elektrische Triebfahrzeuge, Band 1, p.35 .

2.4 Kørefasen.

I kørefasen er accelerationen nul og hastigheden holdes konstant lig med v_{max} . Motorens trækeffekt bestemmes af ud fra (9) ved at sætte a = 0

$$(12)\quad P_{motor} = m_{dyn}\,(\;A + B\;v_{max}^2\,)\,v_{max} \quad ,$$

$$a(v) \;= 0\;.$$

Ser vi bort fra luft- og rullemodstand, bliver motorens trækeffekt nul.

2.4 Friløbsfasen.

Motoren er slået fra, og trækeffekten er derfor nul. Togets acceleration er bestemt ved

$$(13)\quad a(v) \;= -\,A - B\,v^2,$$

$$P_{motor} = \;0\;,$$

hvor $A = 14{,}73 \cdot 10^{-3}$ m/s^2 og $B = 38{,}18 \cdot 10^{-6}$ m^2/s^4 gør rede for henholdsvis rulle- og luftmodstanden. Der er ingen forskel imellem kørefasen og friløbsfasen i den simple model, hvor vi ser bort fra luft- og rullemodstanden.

2.6 Bremsefasen.

Ved en bremsning bremses der på alle aksler i toget, og man tilstræber at bremsningen finder sted med konstant negativ acceleration under hele bremseforløbet. Ligesom ved igangsætningen vil man helst undgå, at hjulene blokerer. Under bremsningen er motoren koblet fra og trækeffekten er nul.

Vi antager, at togets deceleration $a_0 > 0$ er konstant, og at toget bremser på alle hjulene på lokomotiv og vogne. Vi antager endvidere, at den samlede vægt $m \cdot g$ af toget er ligeligt fordelt på alle togets hjul . Endelig ser vi bort fra rulle- og luftmodstanden under bremsningen. En sammenhæng imellem a_0 og den mindste friktionskoefficient, der skal til før hjulene glider, kan findes ud fra massecentersætningen. Et tilnærmet udtryk for μ_{min} fås af ligningen

$$(14)\quad m_{dyn}\,(\,-a_0\,) \;\cong\; F_{m,frik} + F_{v,frik} = -\,\mu_{min}\,m\,g$$

hvor m er togets samlede masse, og m_{dyn} er togets dynamiske masse. Skal bremsningen forgå uden at hjulene glider, må den statiske friktionskoefficient μ derfor med tilnærmelse opfylde

$$(15)\quad \mu \;\geq\; \mu_{min} \;=\; \frac{m_{dyn}\,a_0}{m\,g}\;,$$

hvor m er den samlede masse af toget. Decelerationen sættes i praksis til $a_0 = 1$ m/s^2 af hensyn til kørekomforten.

3. Matematisk model.

Vi så i det foregående afsnit, at hvis motoreffekten var konstant, kunne vi bestemme accelerationen a(v) , som funktion af hastigheden v . Dette kan vi udnytte til at finde togets hastighed v(t) samt den vejstrækning s(t) , som toget har tilbagelagt til tiden t .

Ud fra definitionen for accelerationen, kan vi opstille en vi differentialligning for v(t)

$$\frac{dv}{dt} = a(v) \quad .$$

I et interval for v(t) , hvor $a(v) \neq 0$, vil v(t) være monoton, og der vil derfor eksistere en omvendt funktion t(v) . Ved at separere de variable, finder vi et udtrykket for differentialet dt af den omvendte funktion

$$(16) \quad dt = \frac{dv}{a(v)} \quad , \quad a(v) \neq 0 \quad .,$$

der efter integration giver t som funktion af v

$$(17) \qquad t = t_0 + \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} \quad .$$

hvor $v(t_0) = v_0$. Vejstrækningen s kan vi finde ved at indføre den nye variable s ved differentialet ds = v dt . Multipliceres ligning (16) med v , finder vi for differentialet ds

$$ds = \frac{v\,dv}{a(v)} \quad .$$

Idet $s(t_0) = s_0$ finder vi ved integration

$$(18) \qquad s(t) = s_0 + \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{a(v)} \quad .$$

I første omgang bestemmer (18) vejstrækningen s(v) som funktion af hastigheden v . Løser vi (17) med hensyn til v(t) , kan vi af (18) bestemme s(t) , som funktion af t .

Når vi indsætter accelerationsudtrykket (10) fra den komplicerede model i (17) og (18) , får vi brug for at udregne integralerne

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{\frac{P_{motor}}{m_{dyn}} - Av - B\,v^3} \quad \text{og} \quad \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a(v)} = \int_{v_0}^{v} \frac{v^2\,dv}{\frac{P_{motor}}{m_{dyn}} - Av - B\,v^3}$$

Disse integraler kan løses analytisk ved at dekomponere den brudne rationale funktion under integraltegnet. Dette vil vi ikke gøre her, da de derved fremkomne udtryk bliver ret kompliceret. I stedet vil vi benytte MAPLE til at finde de numeriske værdier for integralerne.

4. Opgaven.

I opgaven tager vi udgangspunkt i et *standardtog*, der består af et ME-lokomotiv og 4 passagervogne. ME-lokomotivet er et diesellokomotiv med elektrisk transmission, et såkaldt dieselelektrisk lokomotiv. Dette standardtog ser man for øvrigt tit som regionaltog på strækningerne til Kalundborg og Nykøbing F.

Her er nogle tekniske data om ME-lokomotivet:

P_{max}	= 2000 kW ,	motorens maksimale trækeffekt
m_m	= 110 tons ,	lokomotivets statiske masse
$m_{m,dyn}$	= 122 tons ,	lokomotivets dynamiske masse
m_v	= 37 tons ,	en enkelt togvogns statiske masse
$m_{v,dyn}$	= 40 tons ,	en enkelt togvogns dynamiske masse
μ	= 0,2 ,	statisk friktionskoefficient imellem hjul og skinner.

1. del. Den simple model.

1. del går ud på at beregne køretiden for et tog på en flad strækning på s_0 = 5 km imellem to stationer.

Toget accelerer til maksimal fart v_{max} = 120 km/h , der holdes, indtil toget bremses med konstant deceleration a_0 = 1 m/s^2 . I denne del af opgaven udelades friløbsfasen.

Endvidere ser vi i 1. del bort fra luft- og rullemodstanden, og vi benytter derfor i accelerations-fasen den simple model fra afsnit 2.3.1 . Til at bestemme v(t) og s(t) benyttes formlerne givet under afsnit 3 .

Toget sættes i gang til tiden t = 0 . Efter tiden t_{min} opnår toget hastigheden v_{min} , hvorefter togets maksimale trækeffekt P_{max} anvendes, indtil den maksimale kørehastighed v_{max} opnås. Den samlede tid, der medgår under togets acceleration, kaldes for t_A .

Den tid, som toget er om at bremse til standsning fra den maksimale hastighed v_{max} kaldes for t_{brems} , og den vejstrækning, som toget gennemløber i samme tidsrum, kaldes for s_{brems} .

Den samlede køretid, som toget bruger for at tilbagelægge de 5 km , kaldes t_0 .

De følgende spørgsmål løses først i hånden. Til optegning af plottene benyttes MAPLE's funktioner "piecewise" og "plot".

Opgave 1.

1. Bestem t_{min} og v_{min} , og beregn togets acceleration a(v) for $0 < v < v_{min}$ og for $v_{min} < v < v_{max}$. Tegn et plot af a(v) i MAPLE (togets trækkraftkurve).

2. Find togets hastighed v(t) og vejstrækningen s(t) for $0 < t < t_{min}$.

3. Bestem togets hastighed v(t) og vejstrækning s(t) i intervallet $t_{min} < t < t_A$ ud fra formlerne

$$t = t_{min} + \int_{v_{min}}^{v(t)} \frac{v\,dv}{\frac{P_{max}}{m_{dyn}}} ,$$

$$s(t) = s(t_{min}) + \int_{v_{min}}^{v(t)} \frac{v^2\,dv}{\frac{P_{max}}{m_{dyn}}} .$$

Bestem dernæst den samlede accelerationstid t_A , og den kørte vejstrækning $s(t_A)$.

4. Bestem bremsetiden t_{brems} og bremsestrækningen s_{brems} , og bestem derved den samlede køretid t_0 .

5. Bestem endelig hastigheden v(t) og vejstrækningen s(t) i intervallerne $t_A < t < t_0 - t_{brems}$ og $t_0 - t_{brems} < t < t_0$.

6. Benyt MAPLE til udføre et plot af v(t) og s(t) for $0 < t < t_0$.

7. Find togets hastighedsprofil v(s) , og optegn et plot af v(s) ved hjælp af MAPLE.

8. Kontroller ved hjælp af MAPLE den fundne værdi i spørgsmål 5 for den samlede køretid t_0 på strækningen $s_0 = s(t_0)$ ved formlen

$$t_0 = \int_0^{s_0} \frac{1}{v(s)}\,ds .$$

2. del. Den mere realistiske model.

I 2. del skal vi igen beregne køretiden for et tog på en flad strækning på s_0 = 5 km imellem to stationer.

Endvidere vil vi bestemme togets samlede energiforbrug ved kørslen. Vi får derfor brug for at arbejde med den mere komplicerede model, hvori vi tager hensyn til rulle- og luftmodstanden.

Vi antager igen, at toget accelerer til maksimal fart v_{max} = 120km/h , der holdes, indtil toget bremses med konstant deceleration $a_0 = 1\ m/s^2$.

Vi vil i accelerations- og kørefasen benytte den mere komplicerede model givet i afsnittet 2.3.2. Vi udelader igen friløbsfasen.

Vi regner med, at der forbruges ca. 1 liter dieselolie for hver 3,1 kWh udviklet trækenergi.

Toget sættes i gang til tiden t = 0 . Efter tiden t_{min} opnår toget hastigheden v_{min} , hvorefter togets maksimale trækeffekt P_{max} anvendes, indtil den maksimale kørehastighed v_{max} opnås.

I de følgende spørgsmål, opstilles først de matematiske udtryk for de ønskede størrelser, hvorefter de beregnes numerisk ved hjælp af MAPLE .

Opgave 2.

1. Bestem togets tophastighed v_{top} , som er den højeste hastighed, som toget kan opnå, med den givne maksimale trækeffekt. Tegn et plot i MAPLE af togets acceleration a(v) for $0 < v < v_{top}$ (trækkraftkurven) .

2. Bestem togets samlede accelerationstid t_A og den kørte vejstrækning $s(t_A)$ ved igangsætning ud fra formlerne

$$t_A = t_{min} + \int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{v\,dv}{\frac{P_{max}}{m_{dyn}} - Av - B\,v^3} \quad .$$

$$s(t_A) = s(t_{min}) + \int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{v^2\,dv}{\frac{P_{max}}{m_{dyn}} - Av - B\,v^3} \quad .$$

3. Bestem vejstrækningen $s_{kør}$, hvor toget har sin maksimale hastighed v_{max} , og den samlede køretid t_0 .

4. Gør rede for at det samlede trækarbejde W , som lokomotivet udfører under kørslen er

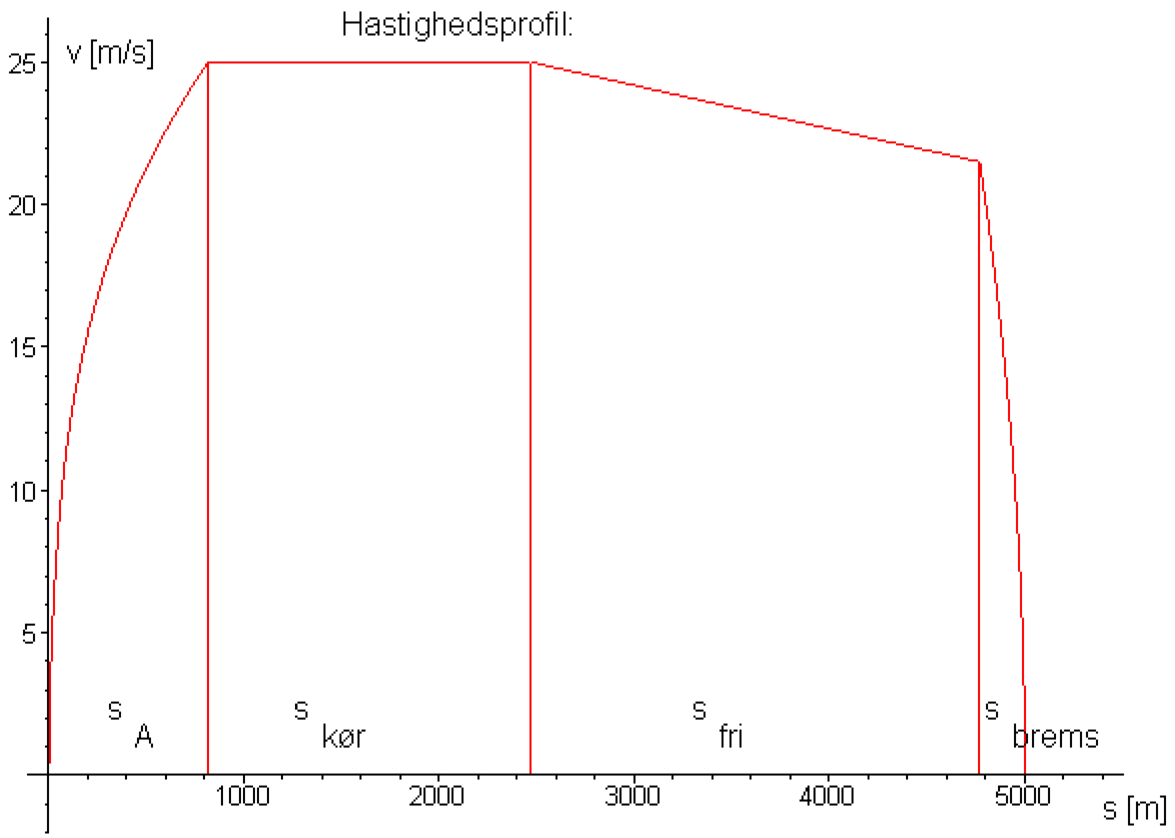
$$W = t_A\,P_{max} + s_{kør}\,m_{dyn}\,(A + B\,v_{max}^2) \quad ,$$

idet vi har tilnærmet trækeffekten med værdien P_{max} for $v < v_{min}$. Find derved det samlede forbrug af dieselolie, der medgår til kørslen.

3. del. Optimering af energiforbruget.

Vi betragter igen en flad strækning imellem to stationer på s_0 = 5 km, hvor køretiden imellem stationerne er fastlagt ifølge køreplanen til t_0 = 4 min.

Vi antager igen, at toget accelererer til maksimal fart v_{max} under udvikling af den maksimale trækeffekt P_{max} . Den maksimale hastighed opretholdes et vist stykke tid, hvorefter motoren slås fra, og toget kører i friløb, indtil toget bremses med konstant deceleration a_0 = 1 m/s^2 . Ved denne fremgangsmåde kan vi opnå en besparelses på energiforbruget.



Figur 2. Hastigheden som funktion af vejstrækningen.

Den samlede kørte vejstrækning s_0 kan skrives , se figur 2 ,

$$s_0 = s_A + s_{kør} + s_{fri} + s_{brems} \ ,$$

hvor

s_A er vejstrækningen, hvor toget accelererer til maksimal hastighed v_{max}.

$s_{kør}$ er vejstrækningen, hvor toget holder konstant hastighed v_{max} .

s_{fri} er vejstrækning, hvor toget kører friløb og hastigheden falder fra v_{max} til v_{brems}.

s_{brems} er vejstrækningen, hvor toget bremser fra hastigheden v_{brems} til det stopper.

De tider , som toget er om at tilbagelægge de enkelte vejstrækninger s_A , $s_{kør}$, s_{fri} og s_{brems} kaldes henholdsvis for t_A , $t_{kør}$, t_{fri} og t_{brems}

Det samlede trækarbejde vil vi beregne ud fra formlen

$$W = t_A \, P_{max} \; + \; s_{kør} \, m_{dyn} \, (A + B \, v_{max}^2) \ ,$$

idet vi under beregningerne benytter den mere komplicerede model givet i afsnittene 2.3.2 og 2.4 , der tager hensyn til rulle- og luftmodstanden.

For given maksimal hastighed v_{max} og en given hastighed $v_{brems} < v_{max}$ lige før toget bremser, bestemmer vi først størrelserne

1. $$t_A = t_{min} + \int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{v\,dv}{\frac{P_{max}}{m_{dyn}} - Av - B\,v^3}$$

2. $$s_A = s(t_{min}) + \int_{v_{min}}^{v_{max}} \frac{v^2\,dv}{\frac{P_{max}}{m_{dyn}} - Av - B\,v^3}$$

3. $$t_{fri} = \int_{v_{max}}^{v_{brems}} \frac{dv}{-A - B\,v^2}$$

4. $$s_{fri} = -\int_{v_{max}}^{v_{brems}} \frac{v\,dv}{A + B\,v^2}$$

5. $$t_{brems} = -\int_{v_{brems}}^{0} \frac{dv}{a_0} = \frac{v_{brems}}{a_0}$$

6. $$s_{brems} = -\int_{v_{brems}}^{0} \frac{v\,dv}{a_0} = \frac{v_{brems}^2}{2\,a_0}$$

7. $$s_{kør} = s_0 - s_A - s_{fri} - s_{brems} \quad \text{og} \quad t_{kør} = \frac{s_{kør}}{v_{max}}$$

Herved kan vi sikre os at toget stopper ud for stationen efter 5 km ! Hvis vi frit vælger værdier for v_{max} og v_{brems} , vil i almindelighed den samlede transporttid $t_A + t_{kør} + t_{fri} + t_{brems}$ være forskellig fra $t_0 = 4$ min .

Opgave 3.

1. Benyt MAPLE til at udregne størelserne givet i punkterne 1 - 6 , når den maksimale hastighed v_{max} og hastigheden v_{brems} er givne .

2. Prøv at finde samhørende værdier for v_{max} og v_{brems} , således at køreplanen overholdes, og bestem for disse tilfælde togets energiforbrug.

3. Prøv at finde det laveste energiforbrug, som vi herved kan opnå. Sammenlign med det energiforbrug, der blev fundet under opgave 2 .

Opgave 4.

Gentag opgave 3 for en strækning på $s_0 = 15$ km med en samlet transporttid på $t_0 = 12$ min.