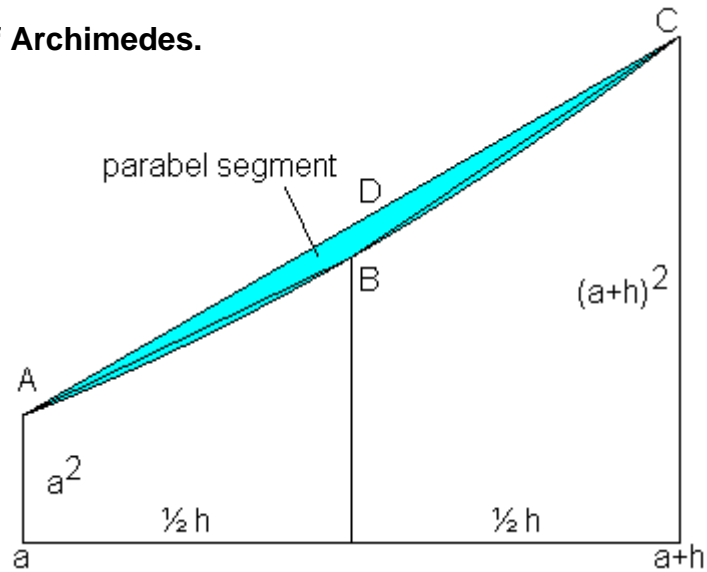


På sporet af integralregning

Opgave 1. På sporet af Archimedes.



Archimedes fandt arealet af et parabelsegment ABC, se figuren, idet han viste, at arealet af den indskrevne trekant ABC i segmentet er $A = 1/8 h^3$.

1. Vis, at $A = 1/8 h^3$.
2. Underinddel segmentet ABC i yderligere 2 segmenter, og vis derved, at segmentet ABC's areal med tilnærmelse er $A + 1/4 A$.
3. Fortsæt med inddelingen, og vis derved, at arealet af segmentet ABC kan skrives
 $A + 1/4 A + 1/16 A + 1/64 A + \dots$
4. Vis, at summen af ovenstående række er $4/3 A$. (Archimedes fandt summen!)

Opgave 2. På sporet af Kepler.

Lav et oplæg til et undervisningsforløb, der skal sætte eleverne i stand til at arbejde med Simpsons formel og med Kepler's "Tønderegel" (se "Keplers tøndeformel").

F. eks. kan eleverne arbejde med 2 forskellige tøndemodeller, se figur 1 og 2 .

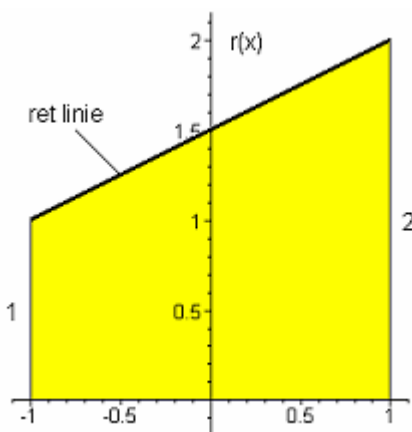


Fig. 1

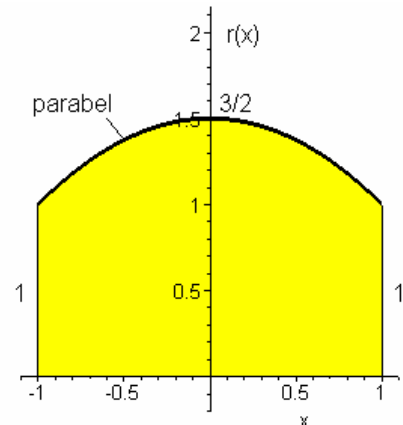
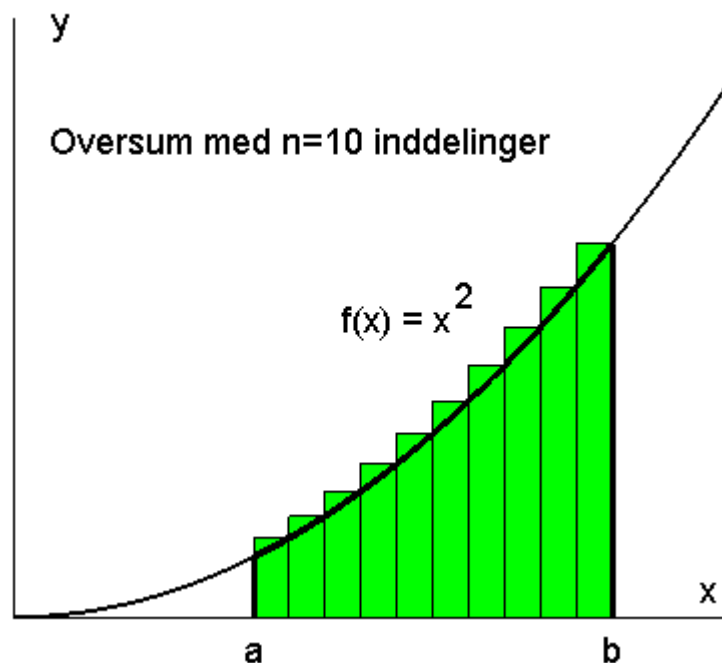


Fig. 2.

VEND !

Opgave 3. På sporet af Riemann.

Opgaven går ud på at vise, at integralet

$$A = \int_a^b x^2 dx$$

eksisterer samt at bestemme dets værdi ved hjælp af begreberne over- og undersum.

Givet parablen $f(x) = x^2$ og et interval $I = [a, b]$, hvor $0 \leq a < b$, se figuren. Intervallet tænkes nu delt i n lige store intervaller, hver med længden

$$h = \frac{b-a}{n} .$$

1. Opskriv udtryk for over- og under summen O_n og U_n for $f(x)$ i intervallet I , og vis derved, at $O_n - U_n \rightarrow 0$, når $n \rightarrow \infty$. Hvad følger heraf ?
2. Vis, at følgende formel gælder

$$\left(a + i \cdot h + \frac{h}{2}\right)^3 - \left(a + i \cdot h - \frac{h}{2}\right)^3 = 3h(a + i \cdot h)^2 + \frac{1}{4}h^3$$

3. Omskriv f.eks. oversummen O_n ved hjælp af formelen fra spørgsmål 2, og find derved grænseværdien for O_n , når $n \rightarrow \infty$. Stemmer det ?

Websteder til inspiration:

Om Archimedes , Kepler og Riemann kan man læse på:

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Archimedes.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Kepler.html>

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Riemann.html>

Om bl. andet integralregningens historie:

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/The_rise_of_calculus.html#10

Johannes Kepler Gymnasiet i Ibenbüren har nogle interessante matematiksider.

<http://www.ibb-voba.de/kepleribb>

<http://www.ibb-voba.de/kepleribb/mathe/lernmat/lernmat.html>

<http://www.ibb-voba.de/kepleribb/mathe/lernmat/jg1213/analysis.html>

Se også opgaven fra den 16. Matematikolympiade:

<http://www.ibb-voba.de/kepleribb/mathe/moly/moly16/moly16.html>

Johannes Kepler Museet:

<http://www.kepler-museum.de/>