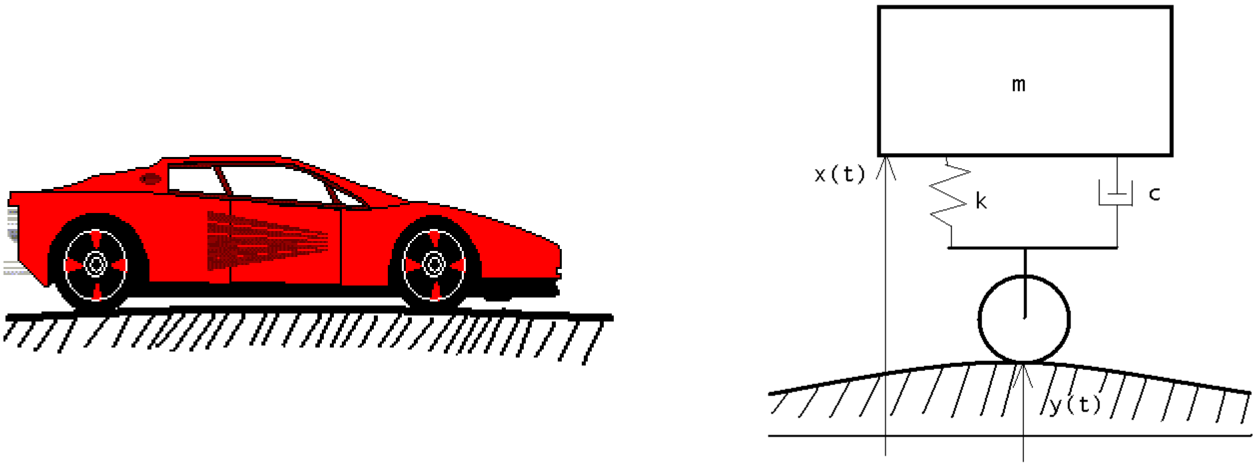
Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Bilkørsel ved resonans.

Opgave. Symbolsk løsning til 2. ordens differentialligning ved hjælp af komplekse tal



Figur 1. Simpel model af en bil.

Synopsis.

Opgaven går ud på at løse en 2. ordens differentialligning ved hjælp af den symbolske metode. Først opstilles den matematiske model, der fører til en inhomogen 2. ordens differentialligning med konstante koefficienter. Da det inhomogene led i differentialligningen består af sinus- og cosinusled , benyttes den komplekse eksponentialfunktion til at bestemme den komplekse løsning til differentialligningen. Og endelig bestemmes amplituden x_0 og fasen φ i den reelle løsning

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t-\varphi) ,$$

som funktion af ω .

Matematisk model.

Vi ønsker at bestemme bilens lodrette svingninger, når den kører hen over et bulet eller rillet underlag. Da vi kun ønsker at beskrive bilens lodrette bevægelse, opstiller vi en simpel model med én frihedsgrad for affjedringen på en bil, som i figur 1. Her er bilens samlede masse af karosseriet m, k er den samlede stivhed af fjedrene på de fire hjul, og c er den samlede dæmpningskoefficient af de fire støddæmpere. Vi ser altså bort fra masserne af hjul og hjulophæng.

Vi forestiller os, at bilen kører på en bulet vej hvis højdevariation beskrives ved funktionen y(t) som funktion af tiden t . y(t) afhænger af bilens fart som vi skal se. Karosseriets absolutte bevægelse i lodret retning beskrives ved funktionen x(t) . Ud fra newtons 2. lov kan vi opstille følgende 2. ordens differentialligning, se figuren

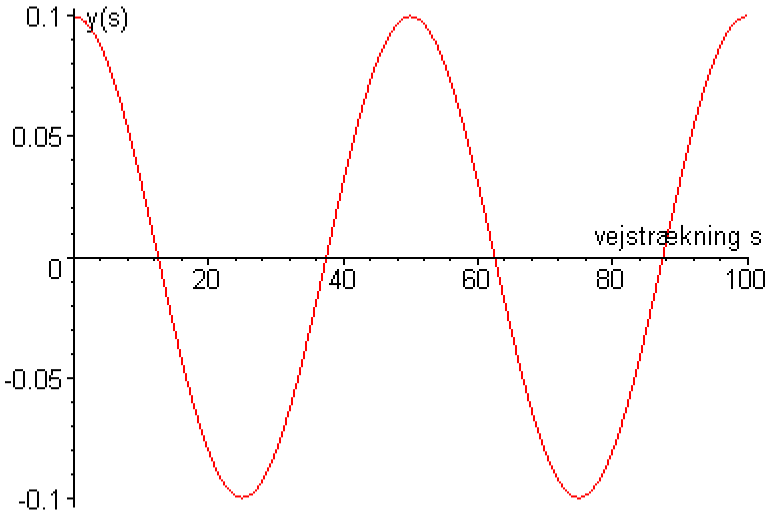
$$m\,\ddot{x}(t) \;=\; -k\,(\,x(t)-y(t)\,)-c\,(\,\dot{x}(t)-\dot{y}(t)\,)\;,\;\text{ newtons 2. lov .}$$

Ved at samle leddene med x(t) på venstre side og leddene med y(t) på højre side, får vi følgende 2. ordens differentialligning i x(t)

$$(1) \quad m\,\ddot{x}(t) + c\,\dot{x}(t) + k\,x(t) \;=\; k\,y(t) + c\dot{y}(t) \quad , \text{ 2. ordens differentialligning}$$

Ligningen (1) er en 2. ordens inhomogen differentialligning med konstante koefficienter.

Det inhomogene led $k\,y(t) + c\dot{y}(t)$ afhænger af hvordan underlagets højde varierer i tiden.



Figur 2. Højdevariationen y(s) langs vestrækningen s

Vi antager nu, at underlagets højdevariation varierer cosinusformet langs vejstrækningen s , som bilen har kørt, og at den største højdeforskel på vejbane er 2a , se figur 2 . Endvidere antager vi, at bølgelængden eller afstanden imellem to toppe på vejen er λ. Vi kan da skrive højdevariationen i y som funktion af s på formen

$$y \;=\; a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,s\right) \;.$$

Er bilens fart v , kan s skrives s = v t , som indsat i y giver

$$y \;=\; a\cos\left(\frac{2\pi\,v}{\lambda}\,t\right) \;=\; a\cos(\omega t)\,, \quad \text{hvor } \omega = \frac{2\pi\,v}{\lambda} \;.$$

y = a sin (ωt) er altså en cosinussvingning med amplituden a og den cykliske frekvens ω .

Symbolsk løsning.

For at løse differentialligningen (1) vil vi antage at y(t) er givet på den komplekse form

$$(2) \quad Y(t) = a\,e^{i\omega t}\,.$$

Vi ser at den den fysiske størrelse y(t) kan fås som

$$y(t) = \mathrm{Re}(Y(t)) = \mathrm{Re}(a\, e^{i\omega t}) = a \cos(\omega t) ,$$

Vi antager nu, at den komplekse løsning X(t) hørende til påvirkningen Y(t) kan skrives på formen

$$(3) \quad X(t) = X\, e^{i\omega t} ,$$

hvor den komplekse konstant X er

$$X = |X|\, e^{-i\varphi} = x_0 (\cos \varphi - i \sin \varphi) ,$$

og hvor φ er fasen. Den fysiske løsning x(t) kan da bestemmes som

$$x(t) = \mathrm{Re}(X(t)) = \mathrm{Re}(\, |X|\, |\, e^{i(\omega t - \varphi)}) = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Indsætter vi de komplekse størrelser X(t) og Y(t) i differerentialligningen (1) finder vi

$$(4) \quad X\, e^{i\omega t} [\, m (i\omega)^2 + c(i\omega) + k\,] = [\, k + c\,(i\omega)\,]\; a\, e^{i\omega t} .$$

Efter division med $e^{i\omega t}$ finder vi for den komplekse amplitude X

$$(5) \quad X = \frac{k + ic\omega}{(k - m\omega^2) + ic\omega}\, a$$

Den fysiske amplitude x_0 og fasen φ er bestemt ved

$$(6) \quad x_0 = |X| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\,\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\,\omega)^2}}\; a \quad , \varphi = -\arg(X) .$$

Opgave.

Givet følgende data for en bil: m = 800 kg , c = $2{,}8 \cdot 10^3$ Ns/m og k = $20{,}0 \cdot 10^3$ N/m .
Bilen kører hen over et underlag med højden a = 0,1 m og bølgelængden λ = 15,0 m .

1. Optegn amplituden x_0 og fasen φ som funktion af bilens hastighed v liggende i intervallet 0..100 km/h .

2. Hvor stor bliver den største amplitude $x_{0,max}$ og den tilhørende fase φ_{max} , og ved hvilken hastighed v_{max} forekommer $x_{0,max}$? Hvad sker der hvis man ændrer støddæmperne eller hjulfjedrene ?

3. Lad MAPLE finde en partikulær løsning for v = v_{max} og sammenlign denne med den stationære løsning $x(t) = x_{0,max} \cos(\omega t - \varphi_{,max})$ fundet i spørgsmål 2 . Plot de 2 løsninger i samme koordinatsystem.