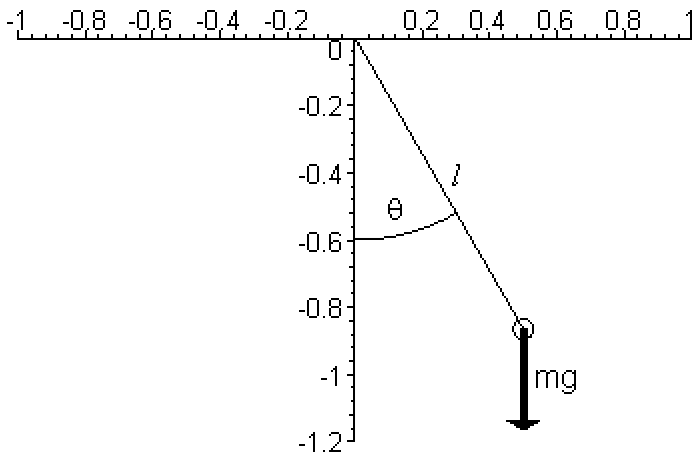
Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Pendulet

Teori: Christiansen, Both & Østergaard Sørensen, MEKANIK, Institut for Fysik, DTU 2000, side 9 - 7 til side 9 - 9.

Det matematiske pendul.



Figur 1. Det matematiske pendul.

Et matematisk pendul består af en punktformig masse m ophængt i en ustrækkelig snor med længden { i tyngdefeltet, se figur 1. Fra fysikundervisningen kender vi en formlen for svingningstiden T af pendulet, der lyder

$$(1) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad .$$

Vi skal i det følgende udlede denne formel, idet vi vil gå ud fra de eksakte formler, som gælder for det matematiske pendul. Disse formler skal vi ikke udlede her. Teorien får I først i fysik på næste semester, se ovennævnte reference, MEKANIK side 9 -7 til 9 -9.

Ved hjælp af de eksakte formler for pendulet og ved at benytte teorien for Taylorrækker, skal vi se, at formel (1) kun gælder med tilnærmelse for små udsving af pendulet.

Linearisering.

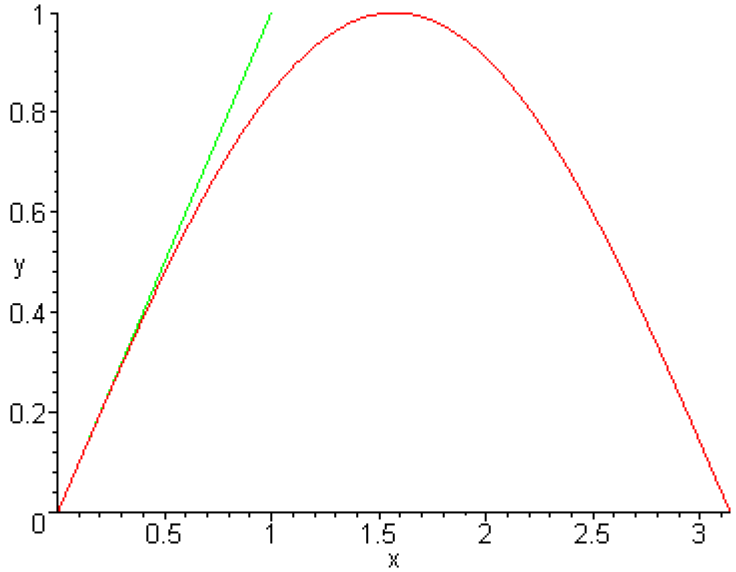
Kalder vi snorens vinkel for $\theta(t)$, hvor t er tiden, kan man vise, at $\theta(t)$ skal opfylde en differentialligning af 2. orden, som lyder

$$(2) \qquad \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0 \quad .$$

Ligning (1) er svær at løse i almindelighed. Dette skyldes, at den ubekendte funktion $\theta(t)$ forekommer som argument til en sinusfunktion. Vi kan imidlertid erstatte sinusfunktionen med dens argument $\theta(t)$, hvis der gælder, at vi har små udsving , d.v.s. $\theta \ll 1$. Dette kan vi indse, ved at betragte Taylorrækken for sin x udviklet i $x_0 = 0$

$$(3) \qquad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots\ldots \cong x \quad , \quad x \ll 1 \quad .$$

For små værdier af x kan vi erstatte sin x med x .Dette svarer til at erstatte funktionen sin x med dens tangent i x = 0 , se figur 2 . Vi siger, at vi har *lineariseret* funktionen.



Figur 2. Linearisering af sin x for x = 0 .

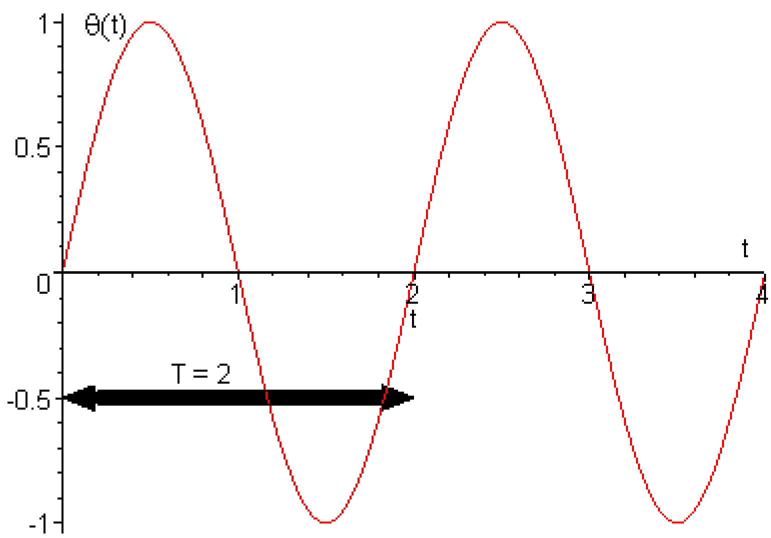
Udnytter vi lineariseringen af sin $\theta(t)$ i ligning (2) , får vi ligningen

$$(4) \qquad \ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0 \quad .$$

Denne ligning har blandt andet sinus løsningen

$$(5) \qquad \theta(t) = \theta_{max} \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t \quad ,$$

hvad vi ser ved at indsætte udtrykket (3) i ligning (4). θ_{max} er den maksimale udslagsvinkel for pendulet. I figur 3 er vist $\theta(t)$ for med svingningstiden eller perioden T = 2.

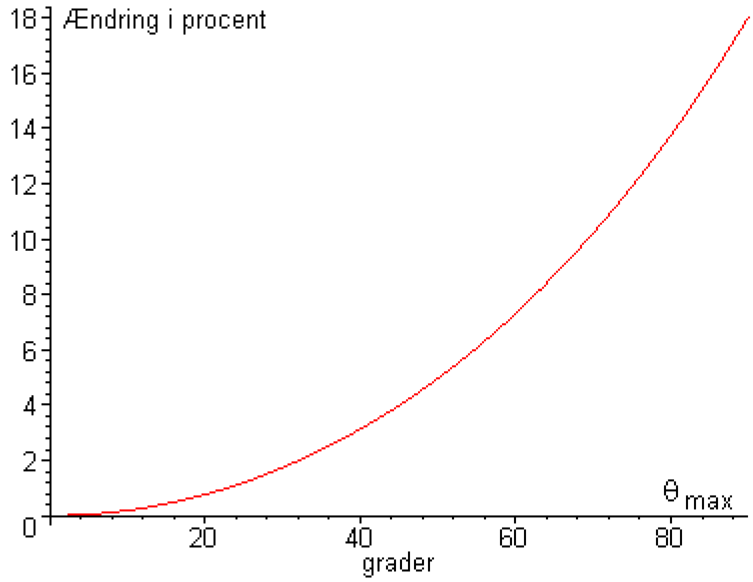


Figur 3. Svingning med perioden T = 2.

Svingningstiden T i bestemmes ved

$$(6)\qquad \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,T = 2\pi \qquad \text{eller} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ , \quad \text{svingningstiden}$$

Formlen udsiger, at svingningstiden stiger med kvadratroden af længden { . Endvidere er svingningstiden tilsyneladende uafhængig af amplituden θ_{max} . I virkeligheden stiger svingnings-



Figur 4. Ændring i svingningstiden T som funktion af θ_{max} .

tiden T svagt med amplituden θ_{max} , som vist i figur 4 . I det følgende skal vi undersøge

Ved omskrivning af differentialligningen givet i (2) kan man vise, at der gælder følgende formel for svingningstiden T , som funktion af θ_{max}

$$(7)\qquad T(\theta_{max}) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\sin^2(u)}}\ .$$

Integralet, der optræder, kaldes for et elliptisk integral.

Opgave 1.

Vis at formel (7) for $\theta_{max} \to 0$ giver det kendte udtryk (6) for svingningstiden T .

Vi ønsker nu at finde en tilnærmelse for hvordan T afhænger af θ_{max} . Til det formål vil vi rækkeudvikle integranden for små værdier af θ_{max}

$$(8)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\sin^2(u)}}$$

Opgave 2.

Opskriv integranden (8) på formen

$$(9) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} \quad .$$

hvor x er givet ved udtrykket

$$x = \sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\sin^2(u)$$

Lineariser udtrykket (9) ved hjælp af teorien for Taylorrækker ud fra $x_0 = 0$.

Opgave 3.

Indsæt det tilnærmede udtryk for integranden i formel (7) og vis derved, at svingningstiden med tilnærmelse kan udtrykkes

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_{max}}{2}\right)\right) \quad .$$

Opgave 4.

Find et tilnærmet udtryk for den procentvise ændring i svingningstiden T, når $\theta_{max} = 60°$, og sammenlign med grafen givet i figur 4.

Opgave 5.

Prøv at lave et svingningsforsøg med et matematisk pendul med { ≅ 1.0 meter og når $\theta_{max} = 10°$ og når $\theta_{max} = 60°$, og se om I kan måle forskellen i svingningstiden?
