

Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

I. De komplekse tals historie**Historien om 3. grads ligningerne**

$$x^3 + a x = b, \quad x^3 + a x^2 = b,$$

- Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, der er spanier, publicerer i år 1145 en komplet formel for løsning af 2. gradsligningen

$$x^2 + b x + c = 0.$$

Løsningen var allerede fundet af algebraens grundlægger Al-Kwarizim, der levede i Bagdad i begyndelsen af 800 tallet.

- Scipione del Ferro (1465 – 1526) , universitetet i Bologna, fandt siden løsningen på 3. gradsligningen

$$x^3 + a x = b,$$

men holdt formelen hemmelig indtil sin død i 1526 , hvor han på dødslejet afslører formelen til sin student Antonio Fiori.

- Nicolo af Brescia, med tilnavnet Tartaglia (stammeren), bliver provokeret af rygter om at 3. grads ligningen er løst og finder hurtigt selv løsningen til ligningen

$$x^3 + a x^2 = b,$$

Fiori hører om Tartaglia's løsning og udfordrer ham til en konkurrence, hvor hver deltager skal give hinanden 30 opgaver, der skal løses over 40 – 50 dage !

Fiori troede han var snedig, idet han gav Tartaglia opgaver, der kunne løses med hans egen ligning, men Tartaglia løste alle Fiori's problemer på 2 timer.

8 dage før opgaverne skulle samles ind havde Tartagli fundet en generel formel for alle 3. grads ligninger.

- Girolamo Cardano (1501 – 1576) fra universitetet i Milano hørte om om Tartaglia's løsning og inviterer Tagtalia til Milano i 1539 , hvor Tartaglia betror sin hemmelighed til Cardano, der lover ikke at afsløre den!

Hemmeligheden afslører Cardano alligevel i 1545 i sin afhandling "Ars Magna", som er den første bog på latin, der omhandler algebra.

II. De komplekse tals historie

Historien om 3. grads ligningen $y^3 + b y^2 + c y + d = 0$



Girolamo Cardano (1501 – 1576) , Milano

- I 1545 offentligør Cardano sin afhandling "Ars Magna" , hvori han giver løsningen på ligningen

$$a y^3 + b y^2 + c y + d = 0 .$$

Han sætter

$$y = x - b/(3a) ,$$

og får ligningen

$$x^3 + 3Q x = 2R ,$$

hvor

$$Q = (c/a) / 3 - (b/a)^2 / 9 , \quad R = (c/a) (b/a) / 6 - (d/a) / 2 - (b/a)^3 / 27 .$$

Udnytter vi at

$$(p - q)^3 + 3 p q (p - q) = p^3 - q^3 ,$$

hvor $p q = Q$ og $2R = p^3 - q^3$, fører dette til ligningen

$$p^6 - 2 R p^3 - Q^3 = 0 ,$$

der er en 2. grads ligning i p^3 . En løsning for $x = p - q$ bliver

$$x = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

III. De komplekse tals historie

Historien om "de nytteløse tal"

- Allerede i 1539 prøver Cardano at løse ligningen

$$x^3 = 15x + 4 ,$$

hvor $3Q = -15$ og $2R = 4$. Dette giver

$$a^6 - 4a^3 + 125 = 0 ,$$

og dermed

$$a^3 = 2 \pm \sqrt{-121} .$$

Cardano kendte den reelle løsning

$$x = 4 ,$$

og indså "vanskelighederne" ved at benytte formlerne for 3. gradsligningen.

- I 1545 skriver Cardano i sin afhandling Ars Magna om løsningen af en 3. grads ligning

"Når man ser bort fra den sjælelige tortur og multiplicerer $5 + \sqrt{-15}$ med $5 - \sqrt{-15}$ får man $25 - (-15) = 40$... og dermed går man til den aritmetiske yderlighed, ja til det ekstreme, der er så langt ude at det er **nytteløst**" .

Helt så nytteløst er det ikke med regningerne, man indfører ret hurtigt forkortelsen

$$i = \sqrt{-1}$$

for den "imaginære enhed" og får derved dannet de "imaginære" tal.
Cardano's "nytteløse" tal skives da kort

$$5 + \sqrt{15} i$$

og kaldes et komplekst tal.

IV. De komplekse tals historie

Definitionen af de komplekse tal



Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) , Dublin

Definition (Hamilton 1833)

Et komplekst tal z defineres som et ordnet talpar

$$z = (x, y) \in \mathbb{C} ,$$

hvor $x, y \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ er mængden af komplekse tal.

Regneregler

Givet to komplekse tal $z_1 = (x_1, y_1)$ og $z_2 = (x_2, y_2)$.

Vi definerer regnereglerne addition og multiplikation ved

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) .$$

Love for addition og multiplikation

Givet tre komplekse tal z_1, z_2 og z_3 . Der gælder følgende love

Kommutative lov: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$,

Associative lov: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$,

Distributive lov: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Der gælder samme regneregler for komplekse tal, som for de reelle tal.

V. De komplekse tals historie

Egenskaber ved de komplekse tal

De reelle tal

Mængden $\mathbb{R}$ af de reelle tal skal være en delmængde af mængden af de komplekse tal $\mathbb{C}$.

De reelle tal definerer vi som tallene $(x,0) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, og vi skriver kort

$$x = (x, 0) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \text{ de reelle tal.}$$

Specielt har vi

$$1 = (1, 0), \text{ den reelle enhed}$$

$$0 = (0, 0), \text{ tallet nul}$$

De imaginære tal

De imaginære tal definerer vi som tallene $(0,y) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, og vi skriver kort

$$z = (0, y) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \text{ de reelle tal.}$$

Det imaginære tal $z = (0,1)$ har den egenskab, at

$$z \cdot z = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1.$$

og kalder derfor $z = (0,1)$ for den imaginære enhed

$$i = (0,1), \text{ den imaginære enhed.}$$

Der gælder altså

$$i \cdot i = -1.$$

De imaginære tal kan nu skrives

$$z = (0,y) = (y,0) \cdot (0,1) = y \cdot i \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ imaginære tal.}$$

Rektangulær form

Et vilkårligt komplekst tal $z = (x, y)$ kan skrives på formen

$$z = (x, y) = (x,0) \cdot (1,0) + (y,0) \cdot (0,1) = x + i y, x, y \in \mathbb{R}, \text{ rektangulær form}$$

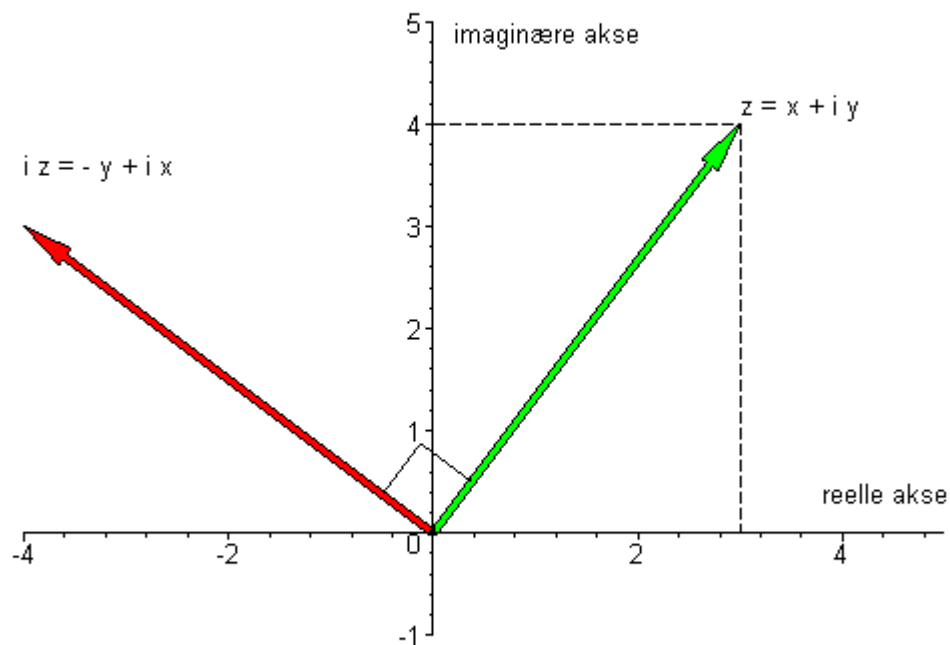
Et komplekst tal kan altså altid udtrykkes ved to reelle tal x og y samt den imaginære enhed.

Populært sagt: Man skal kun lære ét nyt tal, nemlig "i".

VI. De komplekse tals historie

Den komplekse talplan

Argand diagram



I Argand diagrammet afbildes komplekse tal som en vektor i den komplekse plan, se figuren.

Casper Wessel (1745 – 1818) norsk – dansk landmåler. Wessel bruger intuitive metoder til at opnå algebraiske formler. Han publicerer sine resultater i 1799 , men opdages først internationalt i 1895.

Jean Robert Argend (1768 – 1822) schweizisk - fransk matematiker . Skriver en bog i 1806 , hvori de komplekse tal behandles algebraisk og tolkes geometrisk.

Definitioner

$$\operatorname{Re}(z) = x \in \mathbb{R} ,$$

realdelen

$$\operatorname{Im}(z) = y \in \mathbb{R} ,$$

imaginærdelen

$$\bar{z} = x - iy ,$$

komplekst konjugeret

$$|z| = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 ,$$

længden eller modulus

VII. De komplekse tals historie

Algebraens fundamentalsætning



Johann Carl Frederich Gauss (1777 – 1855) , Göttingen

Problem der nagede:

Kunne man opdage flere nye, eksotiske tal, når man forsøgte at løse den algebraiske ligning

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0 ,$$

hvor koefficienterne $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ er komplekse tal ?

Flere kendte matematikere som Euler , Lagrange, Argand og Cauchy har arbejdet på dette problem. Cauchy indfører ordet "konjugerede" i 1821.

Gauss gav i sin doktorafhandling i 1799 et bevis, men det havde flere alvorlige mangler! Gauss introducerer ordet "komplekst tal" i 1831 . Først i 1849 i 50 året for Gauss første bevis lykkedes det at give et generelt bevis, hvor koefficienterne er komplekse tal.

Algebraens fundamentalsætningen udsiger, at et ethvert n^{te} grads polynomium

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 , \quad a_n \neq 0 ,$$

har mindst én kompleks rod $z_0 \in \mathbb{C}$.

På sporet af Cardano

Cardano's formel

Givet ligningen

$$(1) \quad x^3 + 3 Q x = 2 R ,$$

hvor R og Q er reelle tal.

1. Vis at ligning (1) har løsningerne

$$x = S - Q / S ,$$

hvis S tilfredsstiller ligningen

$$(2) \quad S^3 - Q^3 / S^3 = 2 R .$$

2. Vis, at derved at $S = A$ og $S = B$ er løsninger til (2) hvor

$$A = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} , \quad B = \sqrt[3]{R - \sqrt{D}} , \quad D = Q^3 + R^2 > 0 .$$

3. Vis, at der gælder

$$A B = - Q$$

og benyt dette til at vise, at en løsning til (1) kan skrives

$$x = A + B$$

4. Find den reelle rod i ligningen

$$(2) \quad x^3 = 15 x + 4 .$$

Vink: Vis at $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11 i$, og benyt , at $x = A - Q / A$.

Appendix. Cardano's formel.

Givet

$$x^3 + 3Qx = 2R ,$$

hvor

$$x = p - q \quad \text{og} \quad pq = Q ,$$

og p opfylder den "maskerede" 2. grads ligning

$$p^6 - 2R p^3 - Q^3 = 0 .$$

Dette giver de to løsninger

$$p^3 = A^3 \quad \text{og} \quad p^3 = B^3$$

hvor

$$A = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}} , \quad B = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Idet der for A og B gælder

$$A^3 B^3 = -Q^3 \quad \text{og dermed} \quad AB = -Q .$$

Da $pq = Q$, giver dette løsningen $(p,q) = (p, Q/p)$ eller

$$(p,q) = (A,-B) \quad \text{og} \quad (p,q) = (B,-A) ,$$

Dermed bliver $x = p - q$

$$x = A + B$$

Endvidere er der løsningerne

$$x = A \omega_1 + B \omega_2 , \quad x = A \omega_2 + B \omega_1$$

hvor

$$\omega_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \omega_1^3 = \omega_2^3 = 1 .$$