Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Integrationsprincippet og Keplers tønderegel

Litteratur: H. Elbrønd Jensen, Matematisk analyse 1 , Institut for Matematik, DTU 1992 .

Teori: Analyse 1, § 1.1-1.3 , § 1.5 , appendiks B , § 4.1 - 4.4 , § 5.1 - 5.4

Indledning.

Figur 1. Johannes Kepler, 1571 – 1630 .

Den tyske fysiker Johannes Kepler (1571 – 1630) , se fig. 1, er nok mest kendt for sine astronomiske arbejder, men han har også beskæftiget sig med matematik, herunder specielt beregninger voluminer af omdrejningslegemer. Resultatet af disse beregninger offentliggjorde han i 1615 i Linz i en artikel med navnet ”Nova Stereometria Doliorum Vinariorum”, hvor Keplers angiver en måde (Keplers tønderegel), hvorved man med tilnærmelse kan beregne voluminet af et vinfad.

Forhistorien var den, at Kepler lige var blevet gift for anden gang i 1613. Efter brylluppet var det svundet ind i vinkælderen, og da Kepler gerne vilde være en god husbond, ønskede han at få sin vinkælder fyldt op. Han bestilte derfor nogle vinfade og fik dem bragt ned i sin vinkælde. Nogle få dage senere ankom købmanden, der solgte Kepler vinfadene, for at måle volumenindholdet af fadene af hensyn til afregningen. Målingen foregik efter en metode, der fortrinsvis anvendtes i Østrig. En målestav blev stukket ind igennem spunshullet på en vintønde, der lå ned, indtil staven ramte bunde af tønden i den fjerneste ende. Købmanden kunne derefter aflæse rumindholdet på målestaven, der var forsynet med en kubisk skala, se fig. 2. Kepler var skeptisk med hensyn til metodens nøjagtighed, og dette blev starten på Keplers undersøgelse af rumfanget af omdrejningslegemer.

Figur 2. Vinopmåling

Integrationsprincippet.

Allerede Archimedes (287 f.kr.–212 f.kr.) havde bestemt arealet af bl.a. parablen og voluminet af visse omdrejningslegemer. Problemet var, at man ikke havde integralregningen til rådighed. Den kom først i slutningen af 1600- tallet med arbejderne af Newton (1643 -1727) og Leibniz (1646 – 1716). For at bestemme et areal eller volumen, var det derfor nødvendigt at dele legemet, man betragtede, op i små dellegemer, hvis arealer eller voluminerne man kendte på forhånd. Ved at lade dellegemerne blive ”vilkårlige” små og ”summere” op over alle dellegemer fik man så en bedre og bedre tilnærmelse til arealet eller voluminet. Det er denne teknik, der senere bliver til det vi kalder infinitesimalregning, og som danner grundlaget for den matematiske analyse. Teknikken kaldes også for integrationsprincippet, og den kan udstrækkes til bestemmelse af størrelser som f. eks. massecenter og inertimoment. Det var imidlertid først med Riemann (1826-1866), at man fik defineret et matematisk set tilfredsstillende integralbegreb, hvori integralet blev opfattet som resultatet af en grænseovergang.

I forbindelse med bestemmelse af et volumen V kan integrationsprincippet udtrykkes:

1. Opdel figuren i små (infinitesimale) delfigurer, hvis volumen dV er kendt på forhånd (f.eks. cirkelskiver, cylinderskaller, prismer) , og hvis størrelse kun afhænger af en parameter x.

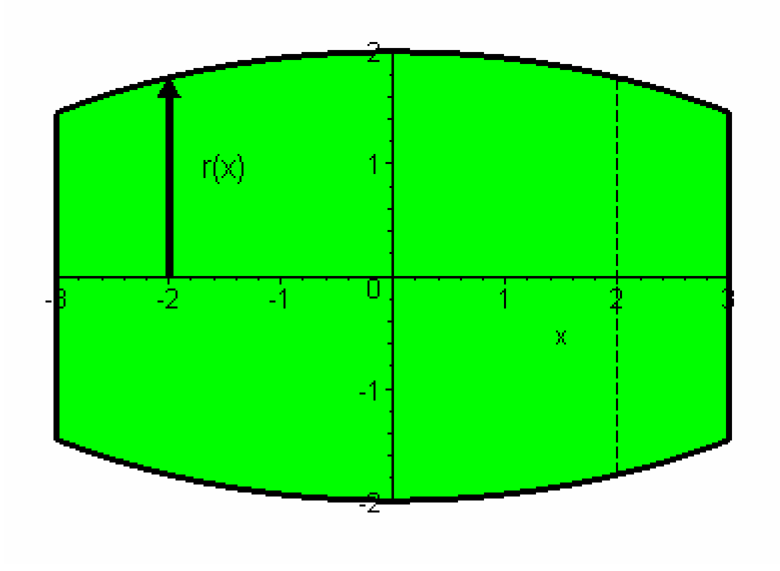
2. Udtryk dernæst det infinitesimale volumen dV som funktion af x , d.v.s. på formen

$$dV = f(x)\,dx$$

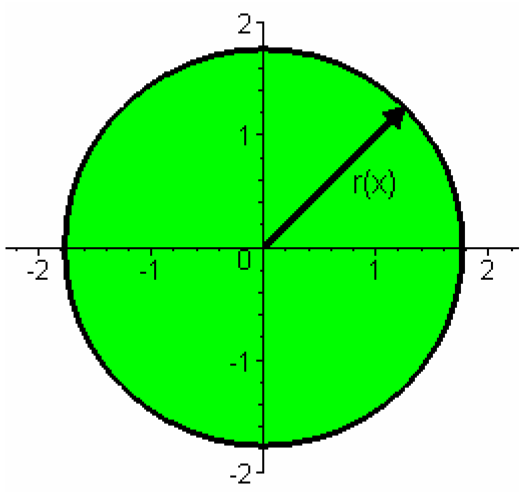
3. Udregn voluminet som integralet

$$V = \int_V dV = \int_a^b f(x)dx$$

Som eksempel på integrationsprincippet vil vi først beregne rumfanget af indholdet af en fyldt vintønde. Vi antager, at tønden har form som et omdrejningslegeme, se fig. 3 a og b .



Figur 3a. Fyldt vintønde .



Figur 3b. Tværsnit af fyldt tønde.

Vi antager, at radius r(x) af omdrejningslegemet på stedet x er opgivet for $a \le x \le b$. Vi benytter integrationsprincippet og deler tønden op i cirkelskiver med tykkelsen dx. Rumfanget dV af en cirkelskive på stedet x og med tykkelsen dx er

$$dV = \pi\, r(x)^2\, dx$$

Det samlede volumen for $a \le x \le b$ er da bestemt ved.

(1) $$V = \pi \int_a^b r(x)^2\, dx \quad .$$

Ud fra denne formel kan det samlede volumen af tønden bestemmes. Da man ikke på Keplers tid havde integralregningen til rådighed, måtte man benytte tilnærmelser. I nogle tilfælde kunne man dog beregne et volumen eksakt ved at benytte en regel opstillet af Guldin (1577 - 1643) , og som kaldes Guldins 1. regel. Guldin var en Schweizisk urmager, der kendte Kepler og korresponderede med ham. Guldins 1. regel siger: "*Hvis en plan figur roteres om en akse i sin plan, er voluminet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, produktet af figurens areal gange den vej, som figurens tyngdepunkt har bevæget sig*." Det er netop denne regel, som formel (1) udtrykker. I dag er det ikke nødvendigt at kende legemers tyngdepunkter for at finde et volumen. Lad os se på et konkret eksempel.

Eksempel 1.

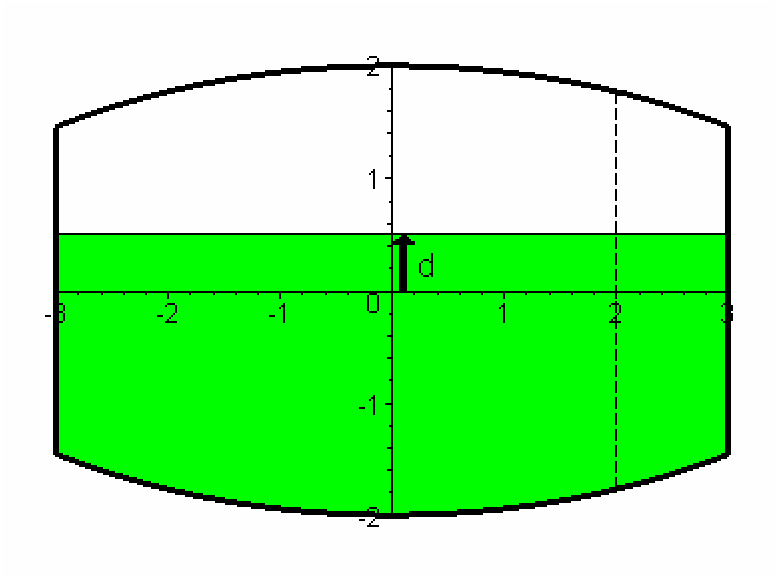
Vi antager, at tønden radius er givet ved funktionen

$$r(x) = 1 + \cos(x) \quad , \quad -1 \le x \le 1 \quad .$$

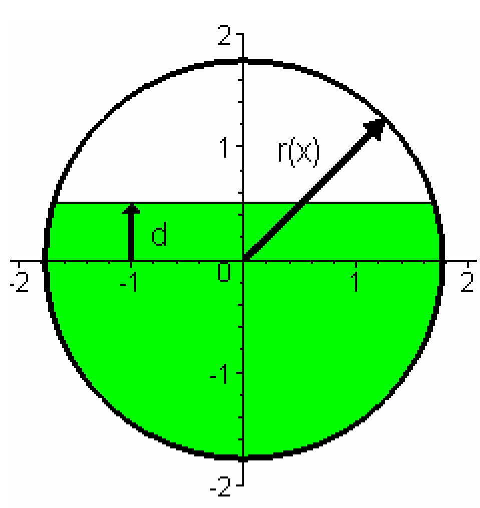
d.v.s. tønden er beliggende for $-1 \le x \le 1$. Det samlede volumen V findes af (1) til

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1+\cos(x))^2\, dx = \pi\,[\, 3 + \sin(1)\cos(1) + 4\sin(1)\,] \cong 21{,}427 \quad .$$

Spørgsmålet er: Hvad gør vi nu, hvis legemet ikke er et omdrejningslegeme? For at besvare det spørgsmål, ser vi på en delvist fyldt tønde, som vist i fig. 4a og b. Vi antager som før, at radius r(x) på stedet x er givet for $a \le x \le b$. Væskens højde over tøndens symmetrilinie kaldes for d.



Figur 4a. Delvist fyldt vintønde.



Figur 4b. Tværsnit af delvist fyldt tønde.

Vi benytter igen integrationsprincippet og deler tønden op i skiver med tykkelsen dx. Skiverne, se figur 4b, har nu form af et cirkelafsnit. Rumfanget dV af en skive på stedet x og med tykkelsen dx er da

$$dV = [\ r(x)^2 \ \arccos\left(\frac{-d}{r(x)}\right) + d\sqrt{r(x)^2 - d^2}\ ]\ dx\ .$$

Det samlede volumen for a≤ x ≤ b er da bestemt ved.

$$(2) \qquad V = \int_a^b [\ r(x)^2 \ \arccos\left(\frac{-d}{r(x)}\right) + d\sqrt{r(x)^2 - d^2}\ ]\ dx\ .$$

Lad os se på eksemplet fra før.

Eksempel 2.

Vi antager igen at tønden radius er givet ved funktionen

$$r(x) = 1 + \cos(x)\ , \quad -1 \le x \le 1\ .$$

Nu antages tønden delvist fyldt med vin, og højden af vinens overflade i forhold til symmetrilinien er d = 0,5 , se fig. 4b Det samlede volumen V findes af (2 til

$$V = \int_{-1}^{1} [\ r(x)^2 \ \arccos\left(\frac{-d}{r(x)}\right) + d\sqrt{r(x)^2 - d^2}\ ]\ dx \cong 14{,}351\ .$$

Integralet kan kun udregnes numerisk. Tønden er altså lidt over halvt fyldt.

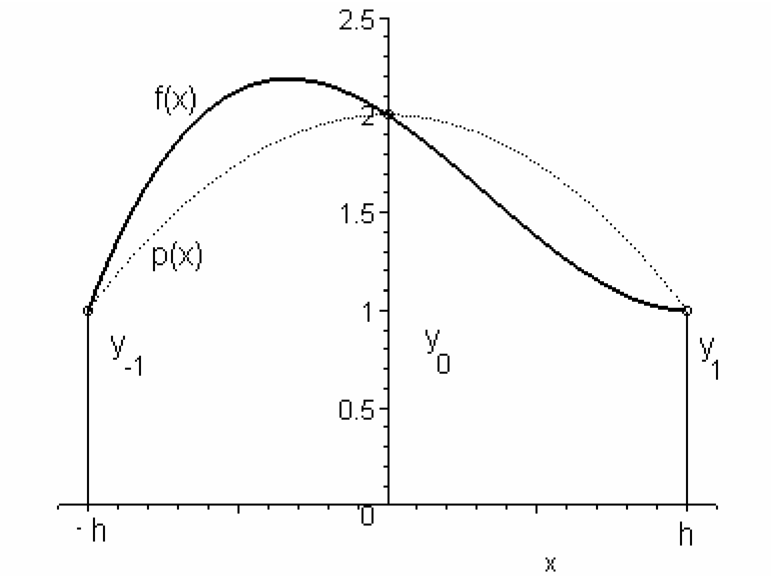
Det er kun i specielle tilfælde for funktionen r(x), at integralerne i (1) og (2) kan udregnes analytisk. Man må derfor benytte numeriske metoder til bestemmelse af volumen. Dette skal vi se på i næste afsnit.

Keplers tønderegel.

Vi antager, at vi har brugt integrationsprincippet til at bestemme et volumen V ved formlen

$$(3) \qquad V = \int_V dV = \int_a^b f(x)dx\ ,$$

hvor f(x) er en given funktion. For et omdrejningslegeme er $f(x) = \pi\, r(x)^2$. For Kepler var problemet dobbelt. Dels kendte han ikke tøndens form i detaljer, d.v.s. han kendte ikke funktionen r(x). Dels havde han et problem med at finde arealet under funktionen funktion $\pi\, r(x)^2$. Lige siden oldtiden havde man dog kendt arealet under parablen. Dette areal blev først udledt af Archimedes i året 225 f.kr. Derfor kunne Kepler benytte parablen som en tilnærmelse for funktionen $\pi\, r(x)^2$. Opgaven er nu numerisk at bestemme arealet under funktionen f(x) i intervallet $a \le x \le b$, idet f(x) tilnærmes med en parabel p(x) .



Figur 5. Tilnærmelse af en funktion f(x) med en parabel p(x)

For at lette udregningerne forestiller vi os, at funktionen f(x) er givet i et interval $-h \le x \le h$, der ligger symmetrisk omkring x = 0 , se figur 5 . Vi tilnærmer f(x) med en parabel p(x), der går igennem punkterne (-h , f(-h)) , (0 , f(0)) samt punktet (h , f(h)) , se figur 5 .

For simpelheds skyld betegner vi funktionsværdierne f(-h) , f(0) og f(h) henholdsvis , y_{-1} , y_0 og y_1 . Et generelt udtryk for en parabel p(x) er

$$p(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 \,.$$

Arealet under parablen i intervallet $-h \le x \le h$ bliver

(4) $$A_p = \int_{-h}^{h}\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)dx = 2\,c_0 h + \frac{2}{3} c_2 h^3$$

Arealet A_p afhænger kun af c_0 og c_2 , og det er altså uafhængig af c_1 . Vi lader nu parablen gå igennem punkterne (-h , y_{-1}) , (0 , y_0) og (h ,y_1) . Der må derfor gælde

$$y_{-1} = c_0 - c_1\,h + c_2\,h^2 \;,$$
$$y_0 = c_0 \;,$$
$$y_1 = c_0 + c_1\,h + c_2\,h^2 \,.$$

Vi har umiddelbart, at $c_0 = y_0$. Adderes den første og sidste ligning, finder vi at

$$c_2 h^2 = \frac{y_1 + y_{-1} - 2\,y_0}{2}$$

Indsættes dette udtryk sammen med ydtrykket for c_0 i udtrykket (4) for A_p , fås

(5) $$A_p = \frac{4y_0 + y_1 + y_{-1}}{3}\,h = \frac{4y_0 + y_1 + y_{-1}}{6}\,(b-a) \quad ,$$

hvor vi har udtrykt arealet ved den oprindelige intervallængde b - a . Formlen (5) kaldes også Simpsons formel. Simpson(1710 – 1761) er mest kendt for sine arbejder om interpolation og numerisk integration.

Fejlen R ved benyttelse af formlen (5) til bestemmelse af integralet $\int_a^b f(x)dx$ kan vises at være

(6) $$R = \int_a^b f(x)dx - A_p = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad , \quad a < \xi < b \quad .$$

Her er $f^{(4)}(\xi)$ den 4. afledede af funktionen f(x) taget i et ukendt punkt $x = \xi$.
Har vi at gøre med en vintønde, der er rotationssymmetrisk, kan vi finde voluminet ved at benytte formel(1) , der siger

$$V = \pi \int_a^b r(x)^2 \, dx \quad .$$

Kender vi ikke r(x) , kan vi forestille os, at vi måler tværsnitsarealerne af tønden A_{-1} , A_1 og A_0 i henholdsvis midten og i de to endepunkter af tønden. Voluminet af tønden vil da med tilnærmelse kunne skrives

(7) $$V_{kepler} = \frac{4A_0 + A_1 + A_{-1}}{6}(b-a) \quad , \quad \text{Keplers tøndeformel.}$$

Formlen er Keplers tøndeformel. Ud fra formel (6) kan fejlen ved at benytte tøndeformlen vurderes, idet f(x) sættet til $f(x) = \pi r(x)^2$.

Lad os til sidst vende tilbage til eksempel 1, hvor vi i stedet benytter tøndeformlen til at finde et tilnærmet udtryk for indholdet.

Eksempel 3.

Vi antager ligesom i eksempel 1 , at tønden radius er givet ved funktionen

$$r(x) = 1 + \cos(x) \quad , \quad -1 \le x \le 1 \quad .$$

d.v.s. tønden er beliggende for $-1 \le x \le 1$. Arealerne A_{-1} , A_0 og A_1 er

$$A_{-1} = A_1 = \pi\left(1 + \cos(1)\right)^2 \quad \text{og} \quad A_0 = \pi\, 2^2 = 4\pi \quad .$$

Dette giver ifølge (7)

$$V_{kepler} = \frac{2\pi}{3}\left(9 + \cos^2(1) + 2\cos(1)\right) \cong 21{,}724 \ .$$

$$\text{fejl} = 21{,}427 - 21{,}724 = -0{,}297 \quad .$$

Til vurdering af restleddet givet ved (6) har vi

$$f^{(4)}(x) = \pi\,(16\cos^2(x) + 2\cos(x) - 8) \quad , \quad |f^{(4)}(x)| \le \pi\, 10 \quad , \quad -1 < x < 1 \ .$$

Herefter kan vi vurdere R til

$$|R| < 2^5 \pi\, 10 / 2880 \cong 0.391 \ .$$

Vi ser, at $|R| \cong 0.391 > |\text{fejl}| = 0{,}297$.