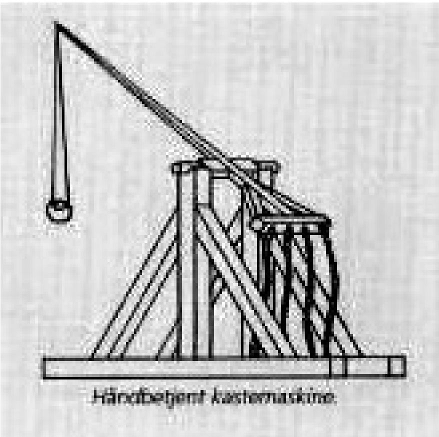
Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Det skrå kast

Teori: Erik Øhlenschlæger, Fysik for Diplomingeniører, Gyldendal 1996, side 13-14 .

Fra kastemaskiner til projektiler.



Figur 1. Skitse af kastemaskine

Figur 2. Rekonstruktion af kastemaskine.

Vi har alle prøvet at kaste ting op i luften for at se, hvor højt vi kan kaste, eller hvor langt vi kan kaste. Gennem historien har man brugt kastemaskiner til krigsførelse, når man skulle indtage belejrede byer og borge. I oldtiden var Archimedes[1] berømt for sine krigsmaskiner, der blev benyttet i forsvaret af byen Syracus mod den romerske belejring.

I figur 1 er vist princippet i en kastemaskine eller "blide" fra middelalderen. På middelalder-centret på Falster har man rekonstrueret en kastemaskine, se figur 2 , som du kan se under afskydning, hvis du kigger på internetadressen

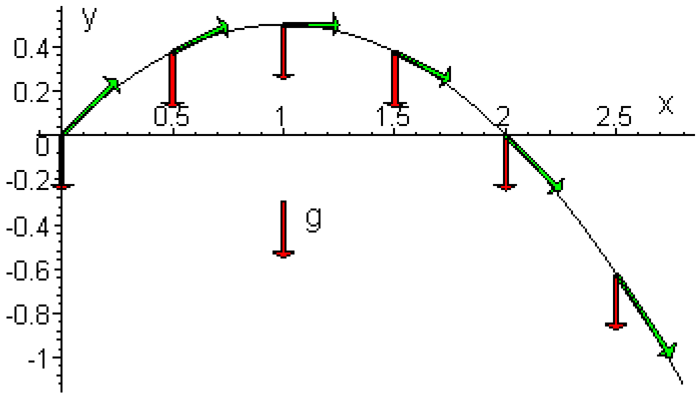
http://www.middelaldercentret.dk/

Tidligere har man ikke kunnet beregne banen for kasteskytset. Det var Galilei[2] , der først fandt, at et kast kunne sammensættes af en vandret bevægelse og et lodret fald. Derved kunne han vise, at den kurve, der fremkommer ved et kast, er en parabel.

Senere opfandt Benjamin Robins[3] det ballistiske pendul, som muliggjorde præcise målinger af projektilers hastigheder. Robins opdagede, at luftmodstanden på et projektil kunne være op til 120 gange så stor som tyngdekraften på projektilet. Han gav en teori for banekurven, som et projektil følger under luftmodstand. Tabeller, der stammer fra Robins blev endnu brugt under 2. verdenskrig til beregning af mortergranaters baner

[1] Archimedes, 287-212 B.C.. Græsk matematiker, fysiker og ingeniør.
[2] Galiei, 1564 -1642 . Italiensk videnskabsmand og astronom.
[3] Benjamin Robins, 1707 - 1751 . Engelsk matematiker og ingeniør.

Kasteparablen.



Figur 3. Kasteparablen

Vi vil nu betragte det skrå kast uden luftmodstand. Bevæger en partikel sig i et konstant tyngdefelt med tyngdeaccelerationen g rettet lodret nedad, se figur 3 , kan accelerations-vektoren af partiklen i et xy-koordinatsystem skrives

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad .$$

Vi antager, at partiklen starter til tiden t = 0 med en hastighed, hvis størrelse er v_0 og som danner en vinkel på α med vandret , se figur 1 . Hastighedsvektoren til t = 0 er da

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Integrerer vi accelerationen med hensyn til t finder vi hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$ til

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha - g\,t \end{pmatrix} \quad .$$

Befinder partiklen sig i punktet (0,0) til tiden t = 0 , finder vi stedvektoren $\vec{r}(t)$ til

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0\,t + \tfrac{1}{2}\vec{a}\,t^2 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_0 \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g\,t^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Rækkevidden $x_{max} = x(t_{max})$ af kastet finder vi ved at sætte $y(t_{max}) = 0$, hvilket giver for t_{max}

$$t_{max} \quad = \quad \frac{2\,v_0\,\sin\alpha}{g} \quad ,$$

hvorefter rækkevidden x_{max} bliver

$$x_{max} \quad = \quad x(t_{max}) \quad = \frac{2\,v_0^2\,\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{g} \quad = \quad \frac{v_0^2\,\sin 2\alpha}{g} \quad .$$

Af formlen for x_{max} ser vi, at for en given begyndelsesfart v_0 vil rækkevidden blive størst, hvis $\sin 2\alpha = 1$, d.v.s. at vi skal kaste med en startvinkel på $\alpha = 45°$.

Den største højde $y_{max} = y((t_0)$ på parablen finder vi når hastigheden i y-retningen $v_y(t_0) = 0$ eller

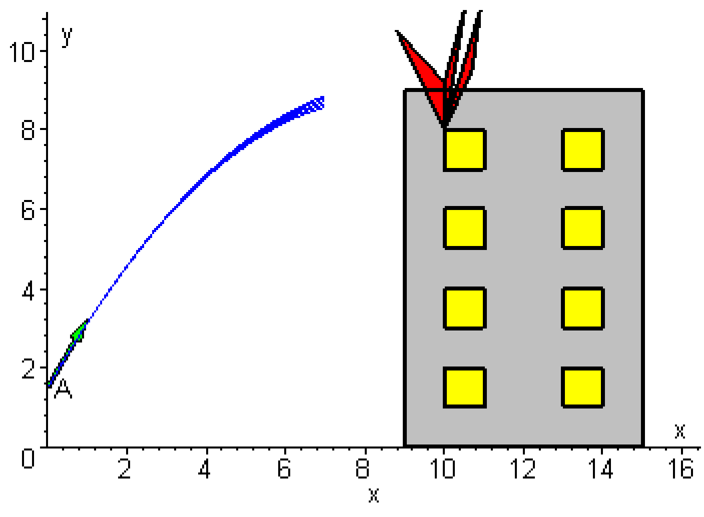
$$t_0 \quad = \quad \frac{v_0\,\sin\alpha}{g} \quad ,$$

der indsat i y(t) giver

$$y_{max} \quad = \quad y(t_0) \quad = \frac{v_0^2\,\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{g} - \frac{v_0^2\,\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{2\,g} \quad = \quad \frac{v_0^2\,\sin^2\alpha}{2\,g} \quad .$$

Af formlen for y_{max} ser vi, at for en given begyndelsesfart v_0 vil den maksimale højde blive størst, hvis $\sin\alpha = 1$, d.v.s. at vi skal kaste med en startvinkel på $\alpha = 90°$.

Opgave.



Figur 4. Sisimiut brandvæsen i aktion.

Sisimiut brandvæsen er blevet kaldt ud til en brand på Byskolen 2 . Brandmændene holder strålerøret i punktet A med en vinkel på $\alpha = 60°$ med vandret i en højde på 1,5 m over jorden, se figur 4 . Afstanden fra A til skolebygningen er 9 m . Højden af skolens bygningen er 9 m og bredden 6 m , se figur 4 .

På grund af vandforbruget i Sisimiut på brandtidspunktet er vandets hastighed ved mundingen af fra strålerøret $v_0 = 14$ m/s .

Spørgsmål 1. Hvor på bygningens facade vil vandstrålen ramme ?

Under slukningsarbejdet er brandvæsnet kørt rundt i Sisimiuts gader, hvor man gennem højttalere har opfordret folk til at spare på vandet. Derved stiger pludselig hastigheden af vandet ved strålerørets munding til v_1 = 18 m/s . Strålerørets vinkel i A er stadig α = 60° med vandret.

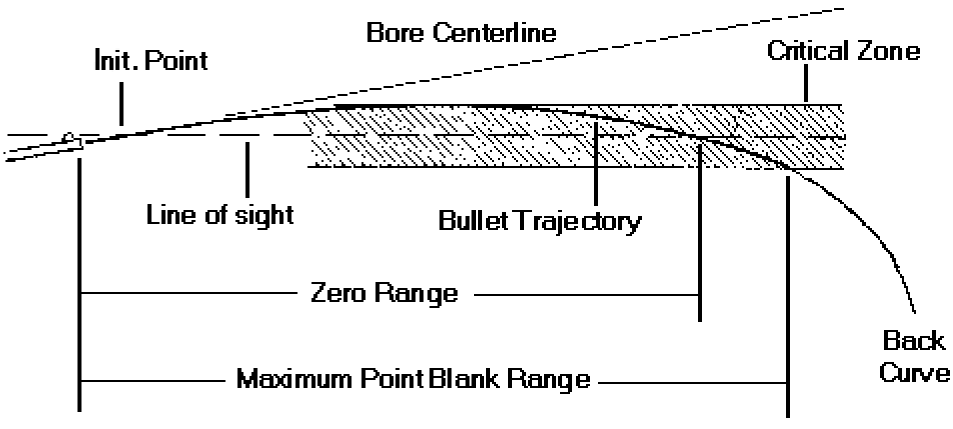
Spørgsmål 2. Hvor rammer vandstrålen nu ?

Vi skal i der følgende se nærmere på den banekurve en partikel følger, når man tager hensyn til luftmodstanden.

Ballistiske kurver og skydevåben.

Figur 5. Jagtriffel.

Banen i det skrå kast er kun med tilnærmelse parabelformet. Forøger vi hastigheden af partiklen, eller betragter vi et længere tidsrum, vil luftmodstandens indflydelse gøre sig gældende. Affyrer vi et projektil fra et skydevåben, som vist i figur 5 , vil projektilet følge en den ballistisk kurve. På figur 6 er vist en skitse af en ballistisk banekurve i forhold til sigtelinien på



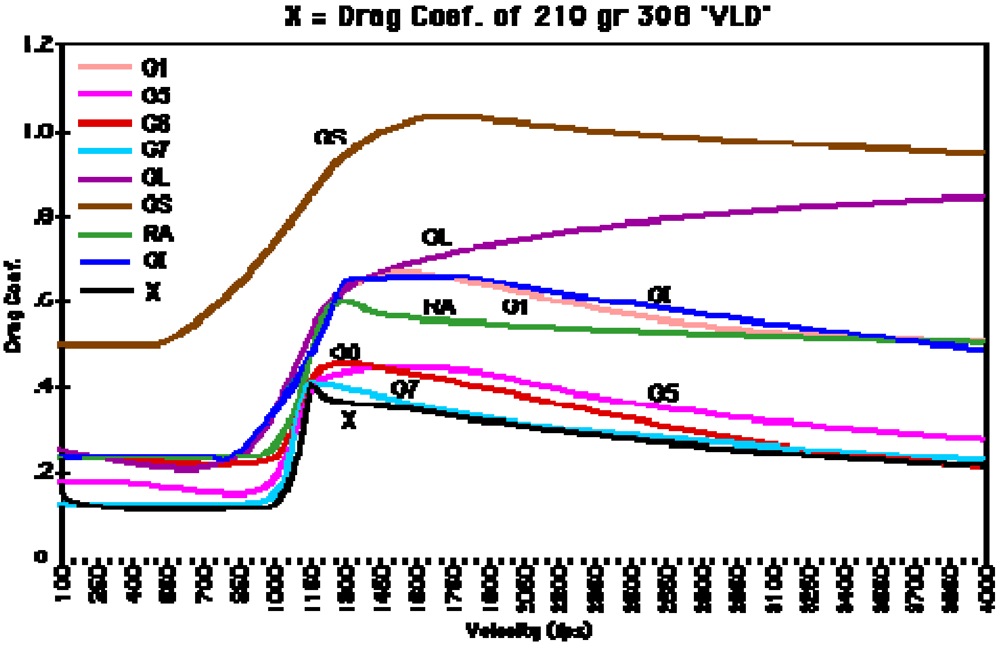
Figur 6. Sigtelinien i forhold til den ballistiske kurve.

skydevåbnet. Den ballistiske kurve afviger mere og mere fra parabelformen jo længere væk projektilet har bevæget sig.

Vi vil nu opstille bevægelsesligningen for et projektil. I gruppeopgave nr. 11 så vi, at luftmodstanden på et legeme med farten v kunne skrives på formen

$$F_D = c_D \, ½ \, A \, \rho \, v^2 ,$$

hvor c_D er modstandskoefficienten, ρ er luftens massefylde og A er legemets tværsnitsareal.

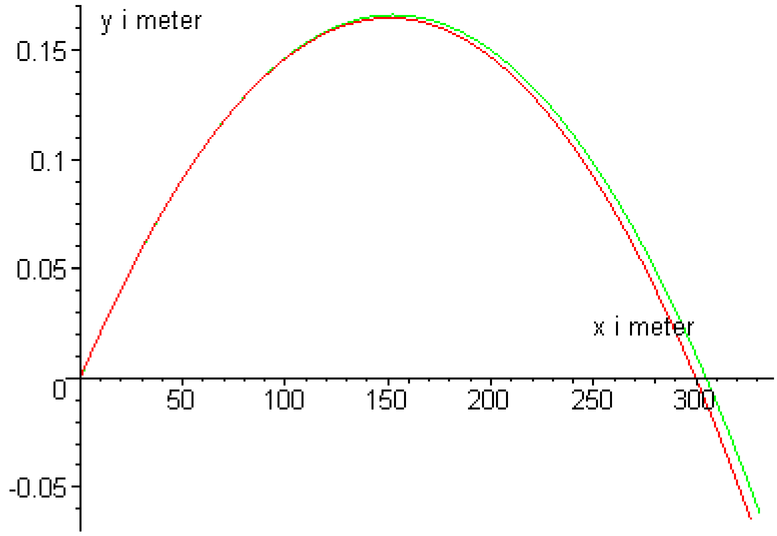


Figur 7. Modstandskoefficientens afhængighed af farten målt i feet/second.

I figur 7 er vist modstandskoefficienten for forskellige typer af projektiler som funktion af Af projektilets fart. Standardprojektilet er G1 , der normalt affyres med en mundingshastighed på ca. 2750 f/s = ca. 838 m/s . For dette projektil er $c_D \approx 0{,}5$. Med kaliber på 8 mm og en massefylde af luften på ρ= 1,20 kg/m^3 bliver F_D

$$F_D \approx 0{,}5 \cdot ½ \cdot \pi/4 \cdot 0{,}008^2 \cdot 1{,}2\ \mathrm{N{\cdot}s^2/m^2} \cdot v^2 = 1{,}51 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N{\cdot}s^2/m^2} \cdot v^2 .$$

Har projektilet en masse på m = 180 g , en begyndelseshastighed v_0 = 838 m/s og en hældning med vandret på α = 0,125 ° , viser en beregning (se MAPLE løsningen) , at riflen er



Figur 8 . Afvigelse af den ballistiske kurve fra en parabel.

indskudt på afstanden 300 m , se figur 8 . Farten af projektilet er efter 300 m faldet til v = 807 m/s , og det er 0,37 sekunder om at nå sit mål.