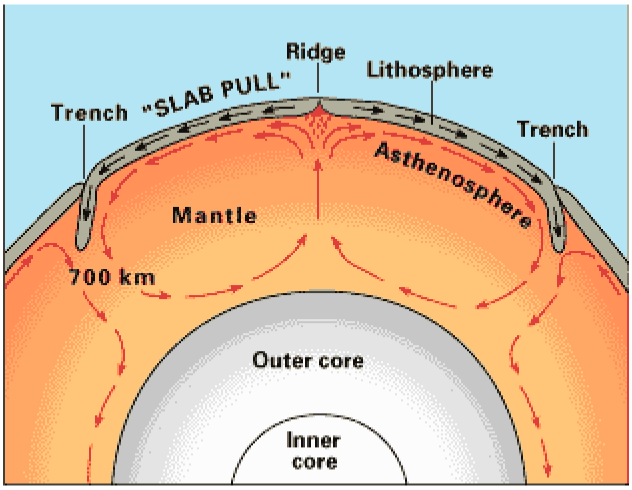
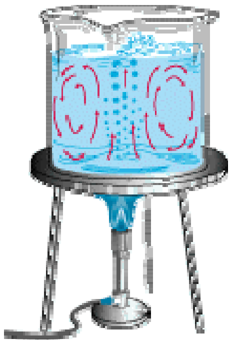
Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Jordskælvs svingninger i bygninger.

Jordskælv.

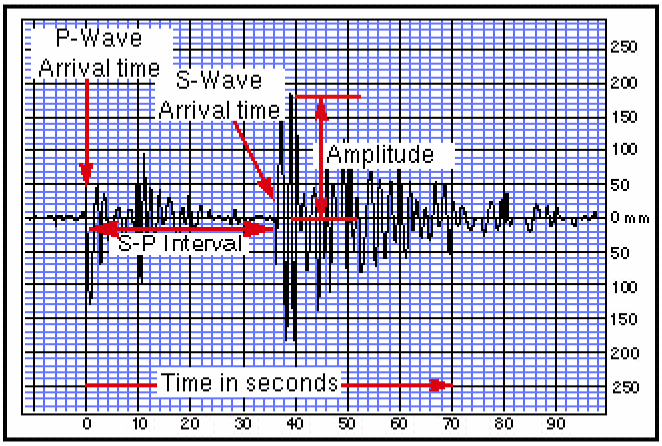




Figur 1. Forklaring på de tektoniske bevægelser.

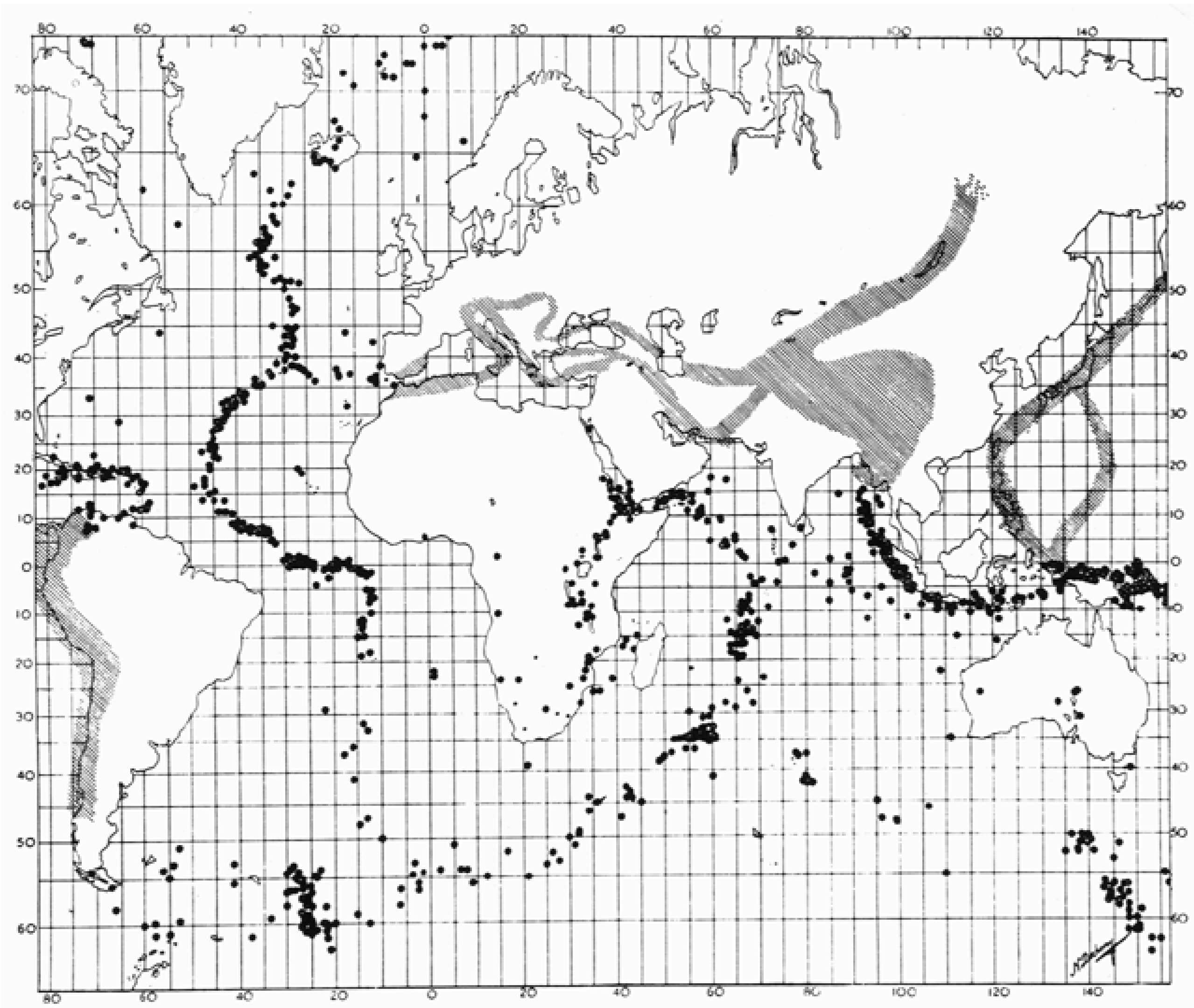
Jordskælv udløses når de tektoniske plader som kontinenterne ligger på pludselig forskydes i forhold til hinanden. Årsagen til at jordskorpe lagene bevæges er muligvis konvektions-strømme i jordens kappe, se figur 1 . Jordskælvene udløses i ca. 40 km's dybde og forplanter sig som bølger i jordens kappe.

Der er to slags jordskælvsbølger: *Trykbølgerne* eller de longitudinale bølger og *forskydnings-bølgerne* eller transversale bølger. Bølgerne registreres på jordoverfladen som vandrette og lodrette bevægelser i jordskorpen. Trykbølgerne også kaldet de primære bølger eller P-bølger bevæger sig hurtigst med hastighed af ca. 6 til 13 km/s . Forskydningsbølgerne også kaldet S-bølger bevæger sig noget langsommere med en hastighed af ca. 3 til 7 km/s .



Figur 2. Jordskorpens bevægelse vist
som funktion af tiden for P- og S-bølger.

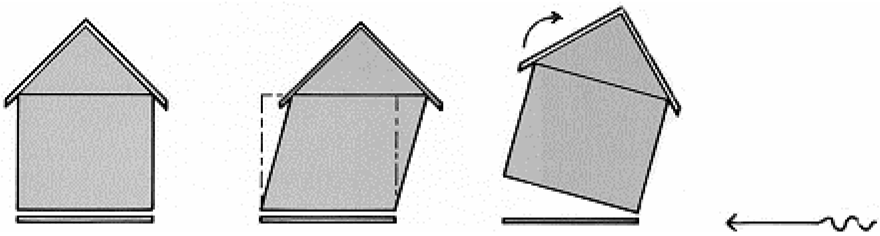
Registreres jordskorpens bevægelse på jordoverfladen med en seismograf , kan man se tidsforskellen imellem ankomsten af P-bølger og S-bølger, se figur 2. Ud fra denne tidsforskel kan afstanden til jordskælvets centrum beregnes. I figur 3 er vist de steder på jorden, hvor



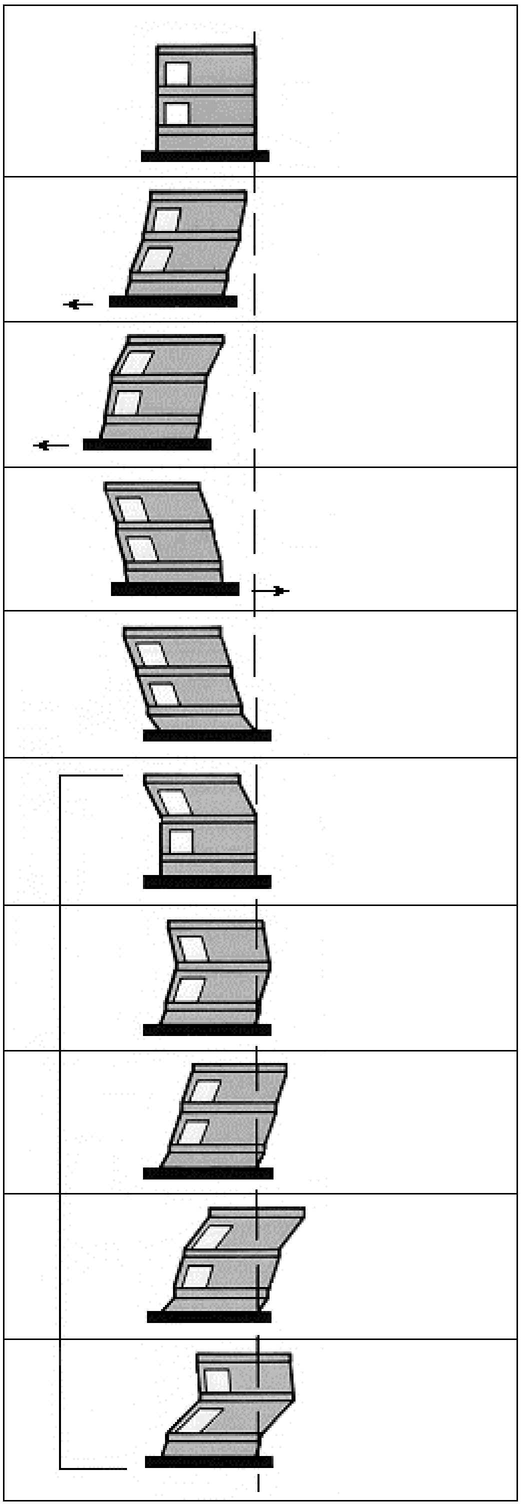
Figur 3. Jordskælvszoner.

jordskælv forekommer hyppigt, de såkaldte jordskælvszoner.

Jordskælvs indflydelse på bygninger.

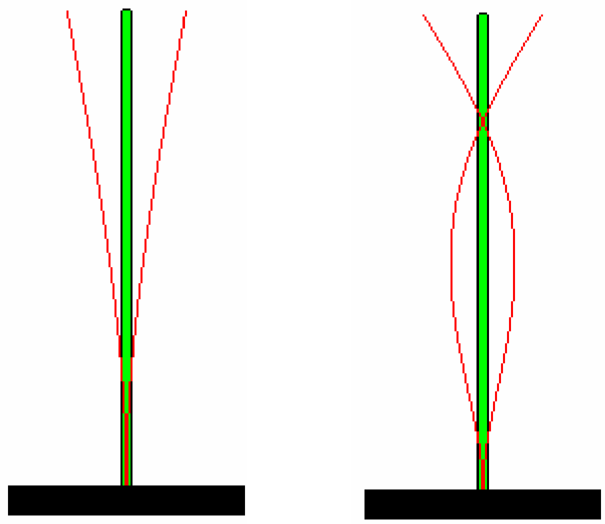


Figur 4. Jordskælvs indflydelse på et hus.



Figur 5. Indflydelse af jordrystelse på højhus.

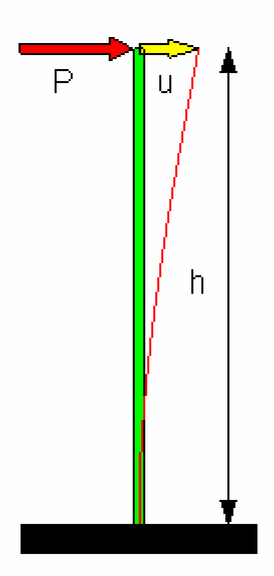
Ved udløsning af et jordskælv vil fundamentet pludselig bevæge sig i vandret retning og huset vil deformeres eller slippe fundamentet, hvorved nogle bygnings-elementer kan vælte. I større bygninger kan der opstå svingninger i konstruktionen, som vist i hosstående figur 5 . Hvis huset ikke er dimensioneret til at optage kræfter i vandret retning vil disse svingninger få huset til at styrte sammen. Som en simpel fysisk model for et hus kan vi benytte en bjælke, der er fast indspændt i den ene ende og fri i den anden ende. Indspændingen skal gøre rede for husets forankring i fundamentet og dermed husets fundering.



Figur 6. To svingningsformer for en bjælke.

Som en model for svingningerne, der kan opstå ved et jordskælv, kan vi bruge en af de svingningsformer, som en fast indspændt bjælke kan svinge med. I figur 6 er vist 2 forskellige svingningsformer for en indspændt bjælke. Prøv at sammenligne billederne i figur 5 med svingningsformerne i figur 6 .

Svingningsmodel af højhus.



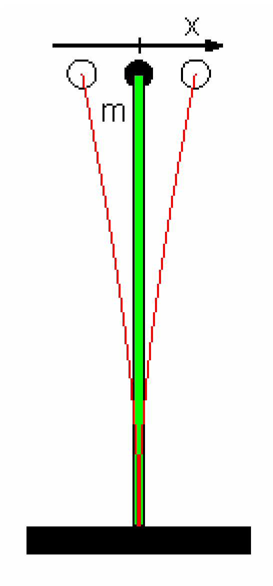
Figur 7. Fast indspændt bjælke.

Som en simpel model af et højhus benytter vi en bjælke med længden h , der er fast indspændt i den ene ende og fri i den anden ende. Belaster vi bjælken med en ydre kraft P i den frie ende, som vist på figur 7 , vil bjælken udbøje stykket u . For sammenhængen imellem udbøjningen u og kraften P gælder P = k u , hvor k er stivheden af bjælken i den frie ende. Et udtryk for stivheden k finder vi fra styrkelæren

$$k = \frac{3\,E\,I_x}{h^3} \quad , \quad \text{bjælkestivheden}$$

hvor er E er bjælkens elasticitetsmodul, I_x er bøjnings inertimomentet af bjælkens tværsnitsareal og h er bjælkens længde.

For at kunne regne på svingningen af bjælken anbringer vi nu en punktmasse m i den frie ende,



Figur 8. Svingningssystem.

som vist i figur 8. <u>Regner vi bjælken for masseløs,</u> har vi at gøre med et simpelt fjeder-massesystem med stivheden k og punktmassen m .

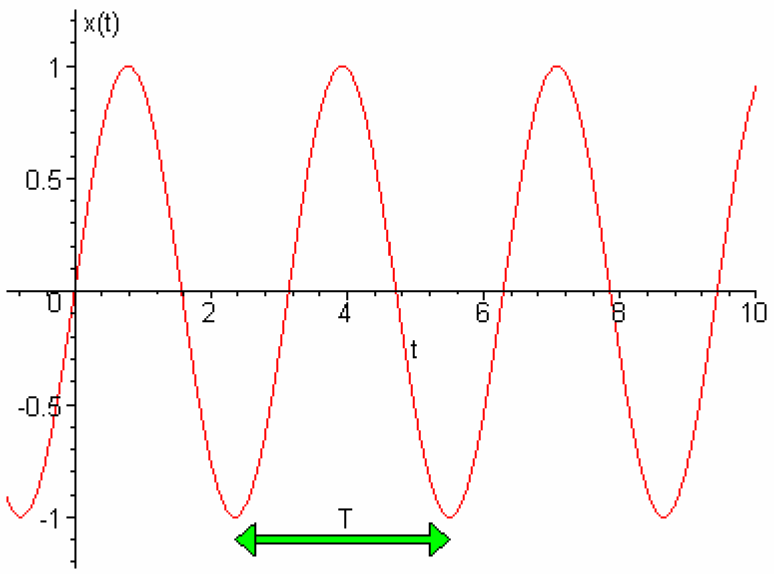
Kalder vi massens udsving for x(t) , giver Newtons 2. lov $m\ddot{x}(t) = -k\,x(t)$ eller

$$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0 \quad , \quad \text{2. ordens lineær, homogen differentialligning.}$$

En løsning x(t) til denne ligning er

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t) \quad , \quad \text{hvor} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad .$$

ω_0 er den cykliske egenfrekvens for det svingende system, og T er svingningstiden.



Figur 9. Egensvingning for bjælke.

Antallet af svingninger pr. tid f_0 , som kaldes frekvensen, er

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{egenfrekvensen , måles i Hz (hertz)}$$

Vi kan konkludere, *at en masseløs bjælke med en punkt masse placeret i den frie ende kan beskrive svingningen i et højhus, når udsvinget af højhuset ligner udsvinget skitseret i figur 8.*

For at modellen kan være brugbar, må vi dog kræve, at egenfrekvensen f_0 , som vi beregner ud fra modellen, må svare til virkeligheden. Hvis vi sætter modellens punktmasse m lig med højhusets samlede masse m_h , vil modellens egenfrekvens blive alt for lav. Årsagen til dette er, at den del af højhuset, der er nærmest fundamentet, næsten ikke bevæger i forhold til fundamentet, hvilket ses ved at betragte udsvinget af den svingende bjælke i figur 8 . Det er kun den øverste del af huset der svinger med. Hvis vi derfor erstatter vores punktmasse m i modellen med massen $m_e = ¼\, m_h$,vil en beregning give den rigtige egenfrekvens af højhuset. m_e kaldes den *ækvivalente masse*.

Egenfrekvensen af højhuset bliver derefter

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_e}} \qquad , m_e = ¼\, m_h \qquad \text{ækvivalent masse . } m_h = \text{højhusets masse.}$$

Jordskælvs svingninger.

Vi antager nu, at højhuset med højden h og den samlede masse m_h modelleres med en masseløs bjælke med en punktmasse $m_e = \frac{1}{4} m_h$ placeret ude i den frie ende, se figur 8 .

Vi forestiller os, at højhusets fundament bliver udsat for vandrette jordrystelser på grund af et jordskælv. Vi antager, at fundamentet til tiden t har bevæget sig stykket $\delta(t)$, se figur 9.

Figur 9. Svingning af fundament.

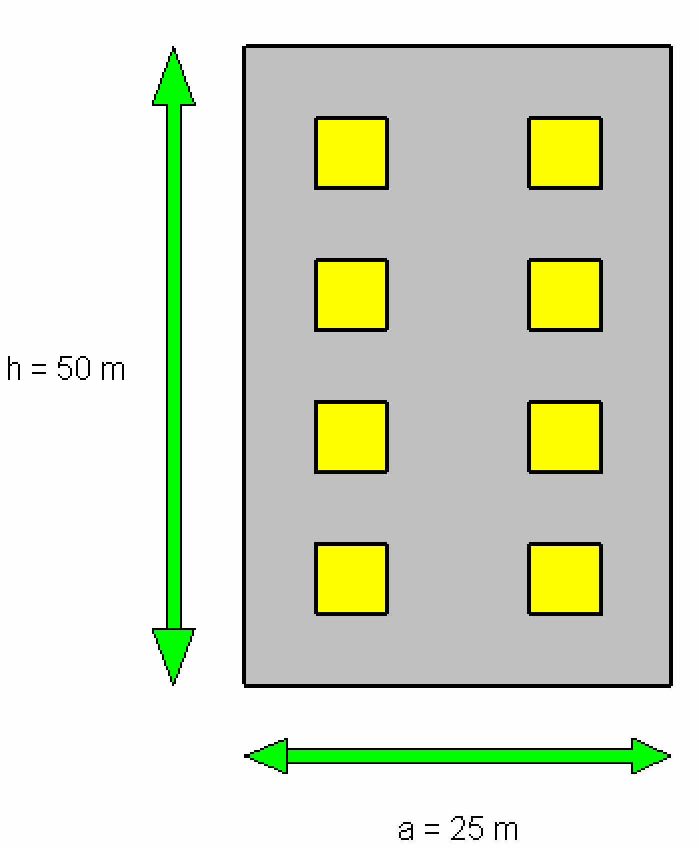
Udsvinget af den ækvivalente masse m_e kalder vi for x(t) . Udsvinget af massen m_e i forhold til fundamentet er da (x(t) - δ(t)) , se figur 9 .

Newtons 2. lov anvendt på m_e giver $m_e \ddot{x}(t) = -k(x(t) - \delta(t))$ eller

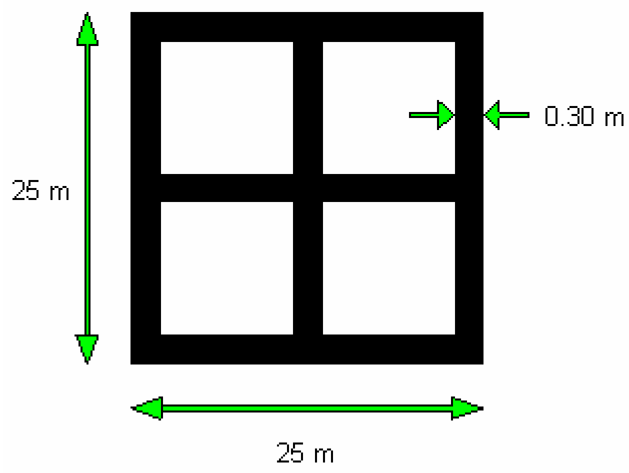
$$m_e \ddot{x}(t) + k\,x(t) = k\,\delta(t) \quad , \quad \text{2. ordens lineær, inhomogen differentialligning.}$$

Kender vi δ(t) , kan vi løse denne differentialligning og derved bestemme det maksimale udsving i toppen af højhuset, samt den maksimale elastiske spænding, der opstår ved fundamentet.

Opgaven.



Figur 10. Højhuset



Figur 11. Grundplan over højhus

For det aktuelle højhus vi betragter er h = 50 m , som vist i figur 10 . Højhuset er opført af armeret eller forspændt beton. Grundplanen for huset, se figur 11 , er kvadratisk med yderdimensionerne 25 m $\times$ 25 m . Tykkelsen af betonvæggene er overalt t = 0,30 m .

For beton gælder:

Easticitetsmodul : E = 24.1 GPa

Massefylde: ρ = 2400 kg/m^3

Brudspænding: σ_B = 30 MPa , tryk , σ_B = 5.5 MPa , træk

For armeret eller forspændt beton er brudspændingen ca. 75% at tryk brudstyrken.

Højhuset bliver udsat for et jordskælv, der giver fundamentet en vandret bevægelse givet ved

$$\delta(t) = \delta_0 \sin(\omega_s t) = \delta_0 \sin(2\pi f_s t)$$

med følgende data:

Jordskælvs frekvens f_s = 4.0 Hz

Amplitude: δ_0 = 8.0 cm .

Spørgsmål 1.

Bestem tværsnits arealets inertimomentet I_x for højhuset. Beregn dernæst stivheden k af højhuset, hvor

$$k = \frac{3\,E\,I_x}{h^3}$$

Spørgsmål 2.

Bestem den samlede masse m_h af højhuset. Beregn dernæst den ækvivalente masse m_e hvor

$$m_e = \tfrac{1}{4}\, m_h$$

Spørgsmål 3.

Beregn højhusets cykliske egenfrekvens ω_0 og egenfrekvensen f_0 , hvor

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad [\text{rad/s}] \;, \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad [\text{Hz}] \quad .$$

Spørgsmål 4.

Find en løsning af formen $x(t) = x_0 \sin(\omega_s t)$ til den inhomogene differentiallgining

$$m_e\,\ddot{x}(t) + k\,x(t) = k\,\delta_0 \sin(\omega_s t) \quad .$$

Vink: Skriv differentialligningen på normeret form

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \omega_0^2\,\delta_0 \sin(\omega_s t) \;, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} \quad .$$

Spørgsmål 5.

Skitser amplitude funktionen $x_0(\omega_s)$. Bestem for de aktuelle talværdier amplituden x_0 af højhusets udsving, samt amplituden af det relative udsving $x_0 - \delta_0$ imellem top og fundament.

Spørgsmål 6.

Bestem den maksimale spænding σ_{max} ved højhusets fundament

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{k(x_0 - \delta_0)\cdot h}{W_x} \qquad , \text{ hvor } W_x = \frac{I_x}{\tfrac{1}{2}a} \text{ er modstandsmomentet .}$$

Hvad er konklusionen ?