

Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Søforurening**Teori:** Hellesen & Oddershede Larsen bind 1 , § 4.4 , samt eksempel 4.5 side 119 -121.**Problem.**

Søen vist på billedet har et areal på ca. 15 km^2 og den maksimale dybde er 200 m . Søen rummer $V = 2 \text{ km}^3$ rent vand. Hvert år får søen tilført en vis mængde rent smeltevand fra bjergene. Gennem elven, der har sit udspring i søen, bortledes hvert år en tilsvarende mængde rent vand fra søen, således at den samlede vandmængde V i søen forbliver konstant. Det øjeblikkelige vandskifte i søen til tiden t kaldes for $a(t)$. Vandskiftet $a(t)$ til tiden t er den mængde vand, der per tidsenhed tilføres søen fra bjergene. Samtidig vil en tilsvarende vandmængde udledes af elven. Vandskiftet $a(t)$ måles i $\text{km}^3/\text{år}$.

En fabrik , der er placeret ved søbredden, ønsker nu at tilføre søen et forurenende tørstof A , der er fuldstændigt opløseligt i vand. Fabrikens produktion vil afhænge af tiden, ligesom den mængde tørstof fabrikken påtænker at udlede. Den udledte mængde af tørstoffet A til tiden t kaldes for $m(t)$, og den måles i tons/år.

Fabrikken søger miljømyndighederne i Nuuk om tilladelse til udledning af tørstoffet A . Myndighederne svarer, at der højst kan tillades en koncentration på $c_0 = 0.1 \text{ } \mu\text{g/l}$ af stoffet A i søen, og at der ikke kan dispenseres fra denne grænseværdi. I sit svar til fabrikken beder miljømyndighederne endvidere fabrikken om at godtgøre, at den kan overholde lovens krav.

Fabrikken har lige ansat en Arktisk Ingeniør, der nu får til opgave at svare miljømyndighederne.

Opgave.

Ingeniøren går straks i gang med at analysere problemstillingen. Hun finder ud af, at den koncentration $c(t)$ af tørstoffet A, man på et givet tidspunkt t vil have i søen, selvfølgelig må afhænge af den mængde $m(t)$ af tørstoffet, som fabrikken påtænker at udlede, samt af søens størrelse V og vandskiftet $a(t)$.

Hun husker fra sin studietid, at der i Matematik for Ingeniører, bind 1 af Hellesen&Oddershede Larsen var et lignende eksempel. Hun slår derfor op på side 120 i bogen.

1. Opstil en matematisk model, der giver en sammenhæng imellem koncentrationen $c(t)$ af det tilførte stof A, vandskiftet $a(t)$, samt søens volumen V .

Fabrikken kender ikke helt produktionsplanerne endnu, og for at få en fornemmelse af problemstillingen, beslutter hun sig i første omgang for at regne produktionen af stoffet A til en ubekendt konstant $m(t) = m_0$. For vandskiftets vedkommende, har man kun en formodning om størrelsesorden på ca. $1 \text{ km}^3/\text{år}$, og vandskiftet sættes derfor til en konstant $a(t) = 1 \text{ km}^3/\text{år}$.

2. Find $c(t)$ udtrykt ved m_0 . Angiv, hvor stor m_0 højst må være, for at miljømyndighedernes krav er overholdt.

I virkeligheden må fabrikken regne med en faldende produktion $m(t)$ efter følgende funktion

$$m(t) = \frac{1}{(1 + t/\text{år})^2} \text{ ton/år},$$

Da nedbørsmængden samtidig falder, vil vandskiftet i søen være aftagende. På det grundlag anslås følgende vandskiftet $a(t)$ i søen

$$a(t) = \frac{1}{1 + t/\text{år}} \text{ km}^3/\text{år}.$$

3. Find under de nye forudsætninger $c(t)$, og undersøg om miljøkravene kan overholdes. Hvis ikke de kan overholdes, hvad vil du forslå, at fabrikken skal gøre?

Under spørgsmål 3 benytter den nye ingeniør computerprogrammet MAPLE, som hun lige har fået virksomheden til at anskaffe. Derved har hun også mulighed for at lave et plot af grafen for $c(t)$, som hun vil bruge når hun fremlægger sine resultater for fabrikkens direktør.