Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Faldskærmsudspring

Teori: Hellesen & Oddershede Larsen bind 1, § 4.4 side 116 - 117 .
Christiansen, Both, Østergaard Sørensen, Mekanik side 13-19 til 13-22 .

Luftmodstand.

Figur 1. Faldskærmsudspringer

Når vi bevæger os gennem luften, vil vi mærke en kraft modsat rettet bevægelsen, som vi kalder *luftmodstanden*. Specielt mærker vi kraften, når vi kører bil og rækker hånden ud ad vinduet. Luftmodstanden sætter en grænse for tophastigheden af en bil , ligesom den har stor betydning for bilens benzinøkonomi. Derfor ser man moderne biler med aerodynamisk eller strømliniet design.

I andre tilfælde ønsker man så høj luftmodstand som muligt. Det er tilfældet, når man skal bremse en flyvemaskine, der lander på et hangarskib. Her benytter man en bremsefaldskærm, der foldes ud idet øjeblik, hjulene rører landingsbanen. En faldskærm er også rar at have på, hvis man agter at springe ud fra et fly i 2 km's højde , se figur 1 .

Luftmodstanden F_D[1] af et legeme, der bevæger sig gennem luften, afhænger af legemets fart v i forhold til luften og tværsnitsarealet A af legemet målt på tværs i forhold til bevægelsesretningen. Det generelle udtryk for luftmodstanden er

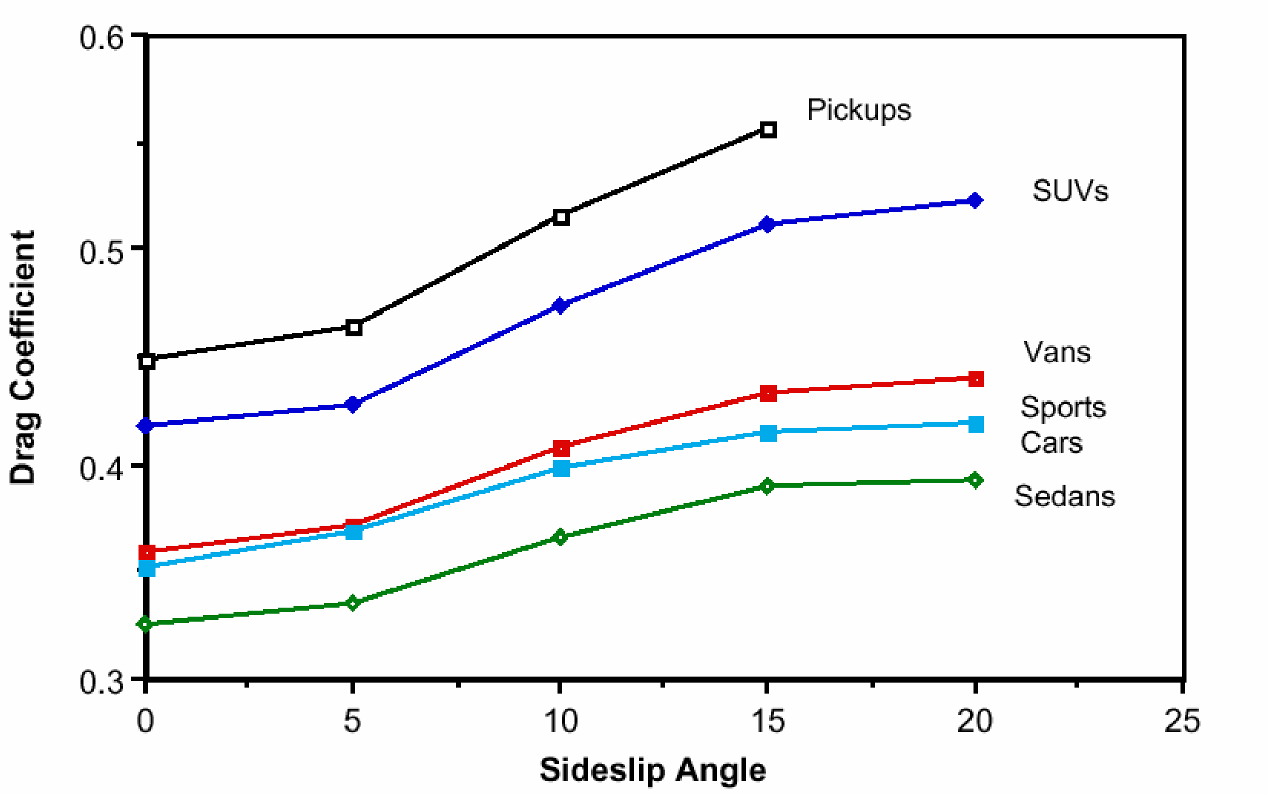
$$F_D = c_D \cdot A \cdot \tfrac{1}{2} \rho v^2 ,$$

Hvor ρ (rho) er luftens massefylde, og c_D er en modstandskoefficient. Modstandskoefficienten c_D afhænger af den aerodynamiske udformning af legemet. Endvidere afhænger c_D af den relative

[1] Det engelsk ord for luftmodstand er "drag" , derfor indeks D på kraften.

fart v imellem legemet og luften. Denne afhængighed af v beskrives ved en dimensionsløse størrelse, der kaldes Reynolds' tal, og som vi skal vende tilbage til senere.

Betragter vi en plan cirkulær skive med radius r og arealet $A = \pi r^2$, finder man ved store hastigheder, at modstandskoefficienten $c_D \cong$ ca. 1 og uafhængig af farten v . Ved at designe biler aerodynamisk, kan man nedsætte modstandskoefficienten til ca. 0,3 . I figur 2. er vist hvordan



Figur 2. Modstandskoefficienten c_D som funktion af vindens relative indfaldsvinkel.

modstandskoefficienten c_D for forskellige biltyper afhænger af vindens relative indfaldsretning i forhold til bilens køreretning.

For en bil af sedan typen er $c_D \cong 0{,}33$. Er tværsnitsarealet A = ca. 2 m^2 , vil en sedan bil, der kører v = 90 Km/h = 25 m/s , blive påvirket af en luftmodstand, der er

$$F_D = 0{,}33 \cdot 2\ \mathrm{m}^2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}2\ \mathrm{kg/m}^3 \cdot 25^2 \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 248\ \text{newton} .$$

Effekten, der skal til at overvinde luftmodstanden, er

$$P = F_D \cdot v = 248 \cdot 25\ \text{watt} = 6200\ \text{watt} = 6{,}2\ \text{kW} = 8{,}4\ \text{hk} .$$

Det skulle en moderne bil nok kunne klare med en motor på 80 hk .

Springer vi ud med faldskærm med et tværsnitsareal på A = 280 feet^2 = 26,0 m^2 , og regner vi med at skærmen ikke glider men falder gennem luften, kan vi sætte $c_D \cong 1{,}2$. Herved bliver luftmodstanden

$$F_D = 1{,}2 \cdot 26{,}0\ \mathrm{m}^2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}2\ \mathrm{kg/m}^3 \cdot v^2 = 18{,}7\ \mathrm{Ns}^2/\mathrm{m}^2 \cdot v^2 .$$

Vi ser, at luftmodstanden vokser med kvadratet på farten v . Forudsætningen for dette er, at c_D kun afhænger af geometrien af legemet og ikke af er afhængig af Reynolds tal.

Reynolds tal.

Reynolds tal, der er opkaldt efter englænderen Osborne Reynolds[2] , er defineret ved

$$Re = \frac{d \;\rho\; v}{\eta} \quad , \quad \text{hvor}$$

- ρ er luftens/væskens massefylde , $\rho = 1{,}2\ kg/m^3$.
- η (eta) er luftens/væskens viskositet , $\eta = 18 \cdot 10^{-6}\ Ns/m^2$.
- d er den største diameter af legemet målt vinkelret på bevægelsesretningen
- v er legemets fart i forhold til luften/væsken

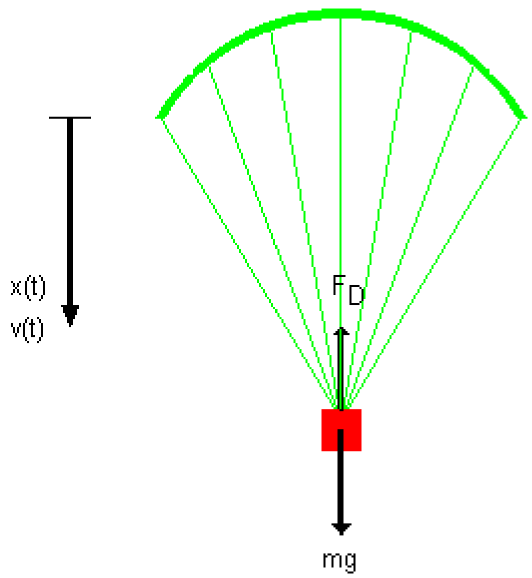
Reynolds er proportional med farten v og angiver hvordan luften strømmer omkring et legeme. Hvis Reynolds tal er lille, d.v.s. mindre end ca.10^3 vil strømningen foregå *laminart*, d.v.s. lagdelt. Hvis Reynolds tal er større end ca. 10^3 , opstår der hvirvler i strømningen, og vi siger, at strømningen er *turbulent*. Når strømningen er turbulent kan vi med god tilnærmelse sætte c_D = konstant.

For en bil, der kører v = 90 Km/h = 25 m/s og d = 1,75 m bliver Reynolds' tal i luft

$$Re = \frac{1{,}75\,m\;\;1{,}2\,kg/m^2\;\;25\,m/s}{18 \cdot 10^{-6}\ Ns/m} = 3 \cdot 10^6 \ .$$

D.v.s luftstrømningen omkring en bil er turbulent. Det samme gælder for en faldskærmsudspringer. Vi kan derfor tillade os med tilnærmelse at sætte c_D = konstant.

Opgave.



Figur 3. Kræfterne ved faldskærmsudspring.

En faldskærmsudspringer, der sammen med sin faldskærm har massen m = 90 kg , springer ud fra h = 2 km's højde. Det antages, at luftmodstanden er givet ved udtrykket

$$F_D = a \cdot v^2 \ ,$$

hvor $a = 18{,}7\ Ns^2/m^2$ er konstant, og hvor v er farten. Foruden luftmodstanden er faldskærmsudspringeren også påvirket af tyngdekraften mg, se figur 3 .

[2] 1842–1912, Britisk professor i ingeniørvidenskab, der først introducerede det dimensionsløse tal.

Opstiller vi Newton's 2. lov for faldskærmsudspringeren, finder vi differentialligningen

$$(1) \quad m\frac{dv}{dt} = m\,g - a\,v^2 .$$

1. Løs ligning (1) analytisk for $v(0) = 0$, og vis at

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{a}} .$$

2. Skitser $v(t)$, når $v(0) = 0$, og find v_∞ for $a = 18{,}7\ \mathrm{Ns^2/m^2}$.

Faldskærmsudspringeren falder i virkeligheden frit et stykke, før faldskærmen udløses. Hvis der går $t_0 = 2$ sekunder inden faldskærmen udløses vil begyndelseshastigheden være $v(0) = g\,t_0 =$ ca 20 m/s .

3. Benyt MAPLE til at optegne løsningen til (1) for forskellige begyndelseshastigheder $v(0)$.

Hjælp: Vi dividerer ligning (1) med m på begge sider af lighedstegnet og separerer de variable

$$(2) \quad \frac{dv}{g - \frac{a}{m}v^2} = dt .$$

Multiplicerer vi (2) med g på begge sider af lighedstegnet, får vi

$$(2) \quad \frac{g\,dv}{g - \frac{a}{m}v^2} = g\,dt ,$$

Vi kan forenkle differentialligningen (2) ved at indføre den de dimensionsløse størrelser

$$u = \frac{v(t)}{v_\infty} , \quad v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{a}} , \quad \text{og} \quad x = \frac{g\,t}{v_\infty} .$$

Herefter kan (2) skrives

$$(3) \quad \frac{du}{1 - u^2} = dx .$$

Løsningen til (3) er

$$(4) \quad u(x) = \tanh(x+c) \quad u < 1 \text{ og } \quad u(x) = \coth(x+c) \quad u > 1 .$$

Løsningen for v(t) bliver herefter

$$(5) \quad v(t) = v_\infty \tanh(gt / v_\infty + c) \text{ for } v(t) < v_\infty \text{ og } v(t) = v_\infty \coth(gt / v_\infty + c) \text{ for } v(t) > v_\infty .$$