Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Bjælkebøjning.

Teori: Se Gere&Timoshenko , Mechanics of Materials, 4.ed. PWS Publishing Company, 1997.

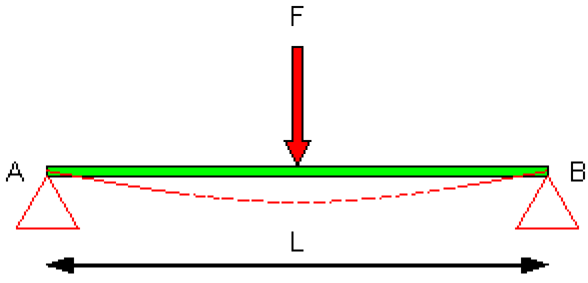
Udførelse: Gruppeopgaven udføres som et mini-projekt i grupper af med 2 studerende.

Rapportering: Hver gruppe skriver en kort rapport, der f.eks. kan indeholde

1. Forside med navne og titel på opgaven
2. Indholdsfortegnelse med sideangivelse.
3. Indledning.
   - Forklar hvad du mener opgaven går ud på.
   - Prøv at forklare, hvorfor en bygningsingeniør skal beskæftige sig med bjælkers nedbøjning.
4. Udledning af generel formel for sammenhængen imellem nedbøjningen af en bjælke og størrelsen af den påførte kraft.
5. Udledning af formlen for inertimomentet for en bjælke med rektangulært tværsnit udtrykt ved højden h og bredden b.
6. Måling og beregning af nedbøjning for en aktuel træbjælke.
   - Prøv f.eks. at belaste med forskellige lastværdier.
   - Prøv med forskellige spændvidder.
7. Konklusion.
8. Eventuelle bilag: Udskrift af MAPLE beregninger.

Aflevering: Opgaven afleveres efter efterårsferien, mandag den 24. februar 2003.

Indledning.



Figur 1. Simpelt understøttet bjælke med enkelt kraft på midten.

Vi betragter en bjælke AB med længden L , der hviler på spidsen af 2 trekantede kiler, se figur 1 . Vi siger, at bjælken er simpelt understøttet i punkterne A og B . Hvis vi belaster bjælken med en kraft F på midten, vil bjælken bøje ned. Projektet går ud på at beregne nedbøjnings-kurven y(x) for den viste bjælke. Vi skal ikke her give en fysisk udledning af grundligningerne for bjælkeudbøjningen, men vil blot postulere disse. I må så vente med den fysiske teori til kurset i statik og styrkelære. Her vil de grundlæggende formler og differentialligninger blive udledt.

Grundligningerne.

1. **Nedbøjningskurven.**

Vi skal nu angive de ligninger, som vi skal benytte for at bestemme nedbøjningskurven y(x) .

Nedbøjningskurven y(x) for en bjælke afhænger af

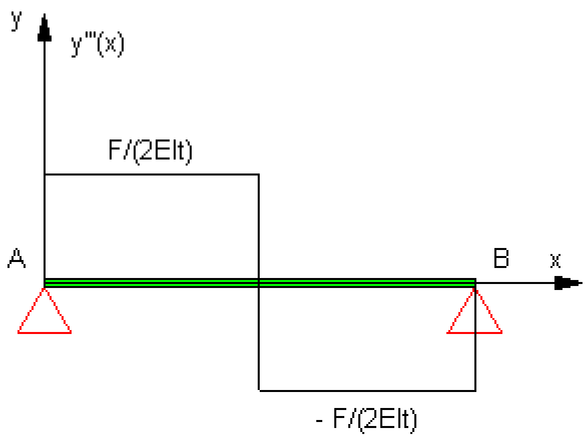
- de elastiske egenskaber af bjælken givet ved elasticitetsmodulen E for materialet af bjælken.

  For stål er E = 210 GPa = $2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa .
  For træ er E = 11 Gpa = $1{,}1 \cdot 10^{10}$ Pa .

- længden af bjælken L .

- størrelsen F af kraften på midten af bjælken.

- Arealmomentet It af 2. orden af tværsnitsarealet af bjælken (arealmomentet af 2. orden kaldes også inertimomentet).



Figur 2. y'''(x) er stykvis konstant.

I styrkelæren kan man vise, at y(x) tilfredsstiller følgende differentialligning, se figur 2,

$$y'''(x) = \begin{cases} a \;, & 0 < x < L/2 \;. \\ -a \;, & L/2 < x < L \;. \end{cases} \quad , \quad \text{hvor} \quad a = \frac{F}{2\,E\,It} = \text{konstant} \;.$$

y'''(x) er således en stykvis konstant funktion. For at lette beregningerne, har vi indført konstanten a = F/(2E It) . Funktionen y'''(x) er diskontinuert de steder på bjælken, hvor der virker ydre kræfter, nemlig i A og B , samt på midten af bjælken.

For at finde nedbøjningskurven y(x) skal vi integrere y'''(x) tre gange. Da y''(x) , y'(x) og y(x) fremkommer ved integration, er disse funktioner alle differentiable og derfor også kontinuerte.

Når vi integrerer får vi to forskellige funktionsforskrifter alt efter om $x < L/2$ eller $x > L/2$. Vi skal da indrette de to forskrifter således, at de integrerede funktioner bliver kontinuerte for $x = L/2$.

Herudover vil der hver gang vi integrerer indgå en arbitrær konstant, som vi skal bestemme. Denne konstant skal bestemmes ud fra de fysiske betingelser. Vi skal ikke her komme ind på den fysiske begrundelse for randbetingelserne, men blot nævne, at der gælder følgende:

Krumningen y'': $y''(0) = 0$ og $y''(L) = 0$.

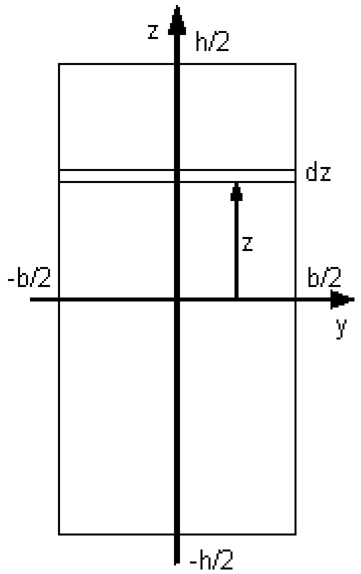
Hældningen y' : $y'(L/2) = 0$.

Nedbøjningen y : $y(0) = 0$ og $y(L) = 0$.

Vink: Prøv i første omgang kun at se på intervallet for $0 < x < L/2$.

$y''(x)$ beskriver krumningen af kurven. Hvis vi har at $y''(x) \equiv 0$, vil hældningen $y'(x) = c$ være konstant , og dermed vil $y(x) = c\,x + d$. Det vil sige, at $y(x)$ er en ret linie (ingen krumning) . Ændringen i hældningen $y'(x)$ beskrives ved $y''(x)$. Er derfor $y''(x) \neq 0$,vil hældningen ændre sig. Vi siger at kurven krummer. Vi skal senere i dette semester vende tilbage til en nøjere beskrivelse af begrebet krumning.

2. Inertimomentet af bjælketværsnittet.



Figur 3 . Inertimoment af bjælketværsnit med hensyn til y- aksen.

I figur 3 er vist et tværsnit af en rektangulær bjælke med højden h og bredden b. Vi har indlagt et yz-koordinatsystem med centrum i arealmidtpunktet (tyngdepunktet) for tværsnittet (x-aksen stikker op vinkelret på papiret) . Arealmomentet eller inertimomentet It af 2. orden , der indgår i nedbøjningsfunktionen y(x) skal beregnes med hensyn til y-aksen , se figur 3 . Et lille areal dA i med bredden b og højden dz , der ligger i afstanden z fra y-aksen, kan skives

$$dA = b \cdot dz$$

It kan beregnes ud fra formlen

$$It = \int_{\Omega} z^2 \, dA = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \, b \cdot dz$$, arealmoment af 2. orden m.h.t. y-aksen .