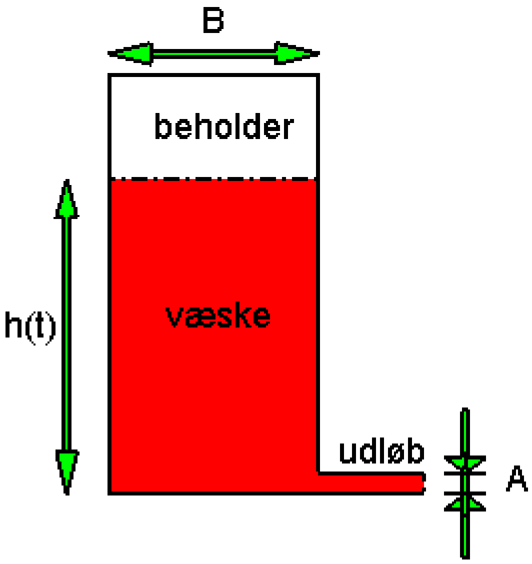
Institut for Matematik, DTU: Gymnasieopgave

Tømning af beholder

Opgave.

Opgaven går ud på at opstille en matematisk model til beregning af den tid, det tager at tømme en beholder med væske.

Torricelli's lov.



Figur 1. Torricelli's forsøg.

Torricelli[1] undersøgte hvor hurtigt væsker strømmer ud af huller i beholdere under indflydelse af tyngdekraften. Hans eksperimenter viste, at strømningshastigheden v af væsken, der løb ud af en beholder, se figur 1 , med tilnærmelse kunne skrives

(1) $v = 0.6\sqrt{2\,g\,h}$, Torricelli's lov ,

hvor g er tyngdeaccelerationen og h er væskehøjden i beholderen. Noget af formlen kan du måske genkende fra det frie fald af et legeme i et tyngdefelt, hvor hastigheden af et legeme, der er faldet stykket h er

(2) $v = \sqrt{2\,g\,h}$, frit fald i tyngdefelt

Formlen for det frie fald i tyngdefeltet udledes ud fra energisætningen, idet den kinetiske energi af et legeme med massen m er $T_{kin} = ½\, m\, v^2$ og ændringen i den potentielle energi er $E_{pot} = m\, g\, h$. Sættes $T_{kin} = E_{pot}$ fås formel(2) .

Benytter vi en tilsvarende betragtning på væsken, der strømmer ud af beholderen, kan vi indse, at Torricelli's lov siger, at væsken må tabe noget af sin kinetiiske energi. Årsagen til dette er den *turbulens* eller *kaotiske bevægelse* der opstår omkring udløbet i beholderen. På grund af denne turbulensen vil noget den kinetiske energi eller bevægelsesenergien til sidste blive omdannet til indre energi eller varme. Dette fænomen skal vi vende tilbage til på 2. semester i fysik.

[1] EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) Italiensk fysiker og matematiker, elev og senere efterfølger af GALILEO GALILEI (1564 -1642) i Firenze.

Vi skal i denne opgave på grundlag af Torricelli's lov opstille en differentialligning til bestemmelse af væskehøjden h(t) som funktion af tiden. Vi siger, at vi opstiller en *matematisk model*.

Den matematiske model.

For at opstille en matematisk model for udstrømningen af væske fra en beholder, må vi benytte de fysiske love, der gælder for udstrømningen.

Vi har allerede været inde på, at det er tyngdekraften, der får væske til at strømme ud. Endvidere har vi været inde på, at der går noget energi tabt ved turbulensen omkring udløbet. Den fysiske lov, vi her benytter, er *energisætningen.* Det er benyttelsen af denne sætning, der fører til opstillingen af Torricelli's lov. Denne lov giver os en sammenhæng imellem de to fysiske størrelser udløbshastigheden v og væskehøjden h. Vi har altså én ligning med to ubekendte. Så vi mangler endnu en ligning, der indeholder størrelserne v og h .

Denne ligning får vi, ved at benytte den grundlæggende fysiske lov, der udsiger, at massen af et lukket system ikke kan forsvinde eller med andre ord: *Massen af et lukket fysisk system er bevaret*. Loven kan ikke bevises, men kan kun efterprøves eksperimentelt.

Vi antager, at væsken ikke kan sammentrykkes. Derved er massefylden af væsken konstant, og vi behøver kun at betragte ændringer i væskerumfang eller volumen. Vi vil nu udtrykke, at det væskerumfang $dV_{beholder}$, der i et lille tidsrum dt forsvinder inde fra beholderen, må være det samme, som det væskerumfang $dV_{udløb}$, der tidsrummet dt strømmer ud af udløbet. For at gøre dette indfører vi følgende størrelser, se figur 1 :

h(t): Højden af væskeoverfladen i beholderen til tiden t.

B(h): Tværsnitsareal af beholderen. B kan afhænge af højden h(t) af væskestanden .

A: Tværsnitsareal af hullet ved udløbet. A regnes konstant

Væsken der stømmer ud af udløbet i tiden dt bvæger sig stykket $dx = v \cdot dt$. Ifølge Torricelli's lov (1) får vi derfor

$$(3) \quad dV_{udløb} = -\ v \cdot dt \cdot A = -\ 0.6 \sqrt{2gh} \cdot A \cdot dt \ .$$

Ændring i volumen af væske i beholderen er

$$(4) \quad dV_{beholder} = B(\,h(t)\,) \cdot dh(t)$$

Sættes (3) og (4) lig hinanden får følgende ligning i h(t)

$$(5) \quad B(h(t))\frac{dh(t)}{dt} = -0.6\sqrt{2\,g\,h(t)}\ A\ .$$

Ligningen er en 1. ordens differentialligning i h(t) . Denne bliver særlig simpel, hvis vi antager, at Beholderens tværsnitsareal B er konstant. Herved får vi ligningen

$$(6) \quad \frac{d\,h(t)}{dt} = -\frac{0.6 \cdot A}{B}\sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)} \qquad B = \text{konstant},\ A = \text{konstant}.$$

Lad os se på et konkret eksempel

Opgave:

Givet en beholder med konstant tværsnitsareal B og med udløbsareal A .

1. Opstil den separerede ligning for differentialligningen givet i (6) .

2. Find dernæst den partikulære løsning til (6) , når der til tiden t = 0 gælder, at $h(0) = h_0$.

3. Vis, at tiden t_0 det tager for at tømme beholderen er givet ved

$$t_0 = \frac{B}{0.3\ A}\sqrt{\frac{h_0}{2\ g}} \quad .$$

Vi ser nu på cirkulær varmtvandsbeholder med højden h_0 = 80 cm og en diameter på d_1 = 40 cm . Udløbet forneden foregår igennem et 1" rør hvis indre diameter er d_2 = 24 mm .

4. Find volumen af varmtvandsbeholderen, når den er fyldt.

5. Find den tid det tager, at tømme en fyldt beholder, og skitser væskehøjden h(t) .