Rutschebanegeometri

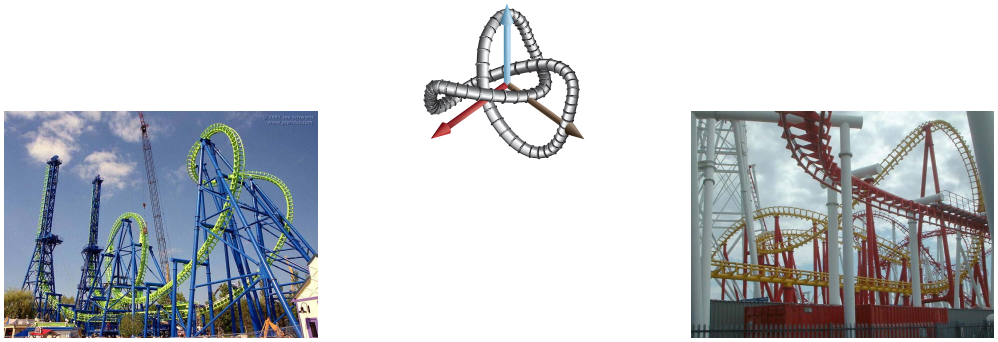
Køreplan

v./ Steen Markvorsen, DTU Matematik, 11. maj 2010

01999 Geometriske Operationer i Plan og Rum

1 Baggrund

En rutschebanekurve er givet ved en parameterfremstilling $\boldsymbol{r}(t)$ for en rumkurve med parameter t og forventes kørt igennem med den derved givne fart, som ikke nødvendigvis er enhedsfart. For eksempel kan man først betragte en bevægelse langs en vandret cirkel eller andre kurver med simpel geometri og krumning forskellig fra 0.



Figur 1: Rutschebane-kurver, dels med skinner og dels med 'tube'.

2 Formål

Der konstrueres skinner til rutschebanevognen på hver side af den givne 'center'-kurve, således at en passager kun oplever accelerationskræfter fremad eller bagud (i forhold til bevægelsesretningen) eller ned i - henholdsvis op af - sædet, dvs. således at passageren ikke oplever 'sideværts'-

kræfter på noget tidspunkt under turen. Desuden overvejes andre konstruktioner - med eller uden skinner - hvor passageren til ethvert tidspunkt er i balance vinkelret på sæde-planen.

2.1 Antagelser, metoder, opgaver

Vi antager først helt generelt, at centerkurven for den ønskede rutschebane er givet ved en parameterfremstilling i det sædvanlige koordinatsystem G:

$$\boldsymbol{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))_G \quad , \quad t \in [0,T] \quad , \tag{1}$$

hvor koordinatfunktionerne $r_i(t)$ er givne funktioner af tidsparameteren.

Hastighedsvektoren for bevægelsen er givet ved

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'(t) &= \|\boldsymbol{r}'(t)\|\boldsymbol{T}(t) \\ &= v(t)\boldsymbol{T}(t) \quad , \end{aligned} \tag{2}$$

hvor vi har indført to nye betegnelser, dels $v(t)$ for farten $\|\boldsymbol{r}'(t)\|$ og dels $\boldsymbol{T}(t)$ for enhedsvektoren i samme retning som hastighedsvektoren (når $v(t) \neq 0$).

OPGAVE **2.1.** Som et første eksempel betragtes en parametriseret cirkel. Angiv to forskellige parameterfremstillinger for den cirkel, der ligger i $(x,y)-$planen med centrum i $(0,0)$ og radius 3. Cirklen ønskes gennemkørt præcis én gang. Den ene parameterfremstilling ønskes kørt med konstant fart 1. Den anden ønskes kørt med ikke-konstant fart, altså med $v'(t) \neq 0$, og således at der startes med fart 0 og sluttes med fart 0 og således at den maksimale fart under hele turen er 1.

Den kraft, der skal bruges på ethvert tidspunkt for at holde passageren med masse m på banen er i henhold til Newton's 2. lov givet ved massen gange bevægelsens accelerations-vektor plus den kraft, der netop balancerer tyngdekraften.

Den resulterende kraft, som holder passageren med masse m på den givne banekurve med den givne bevægelse er derfor

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{r}''(t) - (0,0,-g)_G \quad , \tag{3}$$

hvor vi fra nu antager, at massen af passageren er $m = 1$ og at tyngdeaccelerationen er rettet 'lodret nedad' med værdi $g \geq 0$. Bemærk de to minustegn!

OPGAVE **2.2.** Accelerationsvektor-funktionen $\boldsymbol{r}''(t)$ kan selvfølgelig udregnes direkte ud fra $\boldsymbol{r}(t)$, men ved at differentiere ligning (2) får man mulighed for at benytte, at $\boldsymbol{T}'(t)$ er vinkelret på $\boldsymbol{T}(t)$ (hvorfor er det tilfældet?) og dermed få opløst $\boldsymbol{r}''(t)$ i to komposanter, som er vinkelrette på hinanden. Jævnfør konstruktionen af Frenet–Serret tetraederet i noterne:
http://www2.mat.dtu.dk/education/01999/GeoAccum.pdf

OPGAVE **2.3.** Bestem $\boldsymbol{F}(t)$ for de to cirkel-bevægelser fra opgave 2.1, dels for $g = 0$ og dels for $g = 1$.

Da det er sædet i rutschebanevognen, der skal 'holde passageren på plads' i bevægelsen, er det altså sædet, der skal trykke med kraften $\boldsymbol{F}(t)$ (i den retning) på passageren til tidspunktet t for at holde passageren på plads i vognen. Men det kræver generelt så, at sædeplanen kan roteres passende både omkring og i retning af banekurven!

Vi kan for analysens skyld antage, at sædet er en basis-trekant udspændt af to ortogonale enhedsvektorer $\boldsymbol{e}(t)$ og $\boldsymbol{f}(t)$ således at $\boldsymbol{e}(t)$ hele tiden ligger i den plan, der er udspændt af $\boldsymbol{T}(t)$ og $\boldsymbol{F}(t)$. Samtidig ønsker vi, at sædet er vinkelret på $\boldsymbol{F}(t)$ (se ovenfor) og det fastlægger nu det naturlige medfølgende tetraeder,

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(r(t), \boldsymbol{e}(t), \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{g}(t)) \quad , \tag{4}$$

hvor vi vælger $\boldsymbol{g}(t)$ i samme retning som $\boldsymbol{F}(t)$.

OPGAVE **2.4.** Vis, at ovenstående er en veldefineret konstruktion af det medfølgende tetraeder og at det har de påståede egenskaber når $\boldsymbol{T}(t)$ og $\boldsymbol{F}(t)$ begge er forskellige fra $\mathbf{0}$ og iøvrigt ikke er proportionale. Overvej hvor udefineret tetraederet er, når denne betingelse ikke er opfyldt.

OPGAVE **2.5.** Bestem det ovenfor definerede medfølgende tetraeder for de to cirkelbevægelser fra opgave 2.1, både med $g = 0$ og med $g = 1$. Tegn (eller endnu bedre, animér) bevægelserne langs cirklen.

Vi har endnu ikke defineret skinnerne til bevægelsen. Sædvanligvis er rutschebanevogne ikke udstyret med aktuatorer, der kan rotere sæderne fremad og bagud i forhold til bevægelsesretningen. Det vil sige, at for konventionelle rutschebanevogne er $\boldsymbol{e}(t)$ hele tiden er lig med $\boldsymbol{T}(t)$. Men ved at placere skinner på hver side af centerkurven og lade vognene køre på dem, kan det opnås, at der gives præcis den nødvendige rotation af vognen omkring $\boldsymbol{T}(t)$ således at $\boldsymbol{F}(t)$ i det mindste altid ligger i planen udspændt af $\boldsymbol{g}(t)$ og $\boldsymbol{e}(t)$. Det er netop ved dette kompromis, at der stadig undgås ubehagelige 'sideværts'-kræfter, men til gengæld bliver man nødt til at acceptere accelerationer fremad eller bagud i forhold til bevægelsesretningen.

OPGAVE **2.6.** Bestem dette kompromis, dvs, den tilhørende bevægelse af det medfølgende tetraeder, for de to cirkelbevægelser fra opgave 2.1, både med $g = 0$ og med $g = 1$. Tegn (eller endnu bedre, animér) bevægelserne langs cirklen.

OPGAVE **2.7.** Samme opgaver som i 2.6 men nu med en cirkel, der ikke ligger i $(x,y)-$planen. For eksempel med en cirkel, der ligger i $(x,z)-$planen.

OPGAVE **2.8.** Hvordan skal skinnerne helt generelt placeres i forhold til centerkurven for de konventionelle rutschebanekonstruktioner?

OPGAVE **2.9.** Overvej nye konstruktioner af 'rutchebaner' hvor passageren kun oplever kræfter vinkelret på sædet under hele turen også selv om farten $v(t)$ er variabel. Vink: Vandrutschebaneprincipper, se tuben i figur 1.