KRUMME FLADERS KRUMNING

InterMat 2016

STEEN MARKVORSEN

DTU COMPUTE 2016

Indhold

1 Regulære flader i rummet **5**
1.1 Det sædvanlige koordinatsystem i rummet 5
1.2 Graf-flader for funktioner af to variable 6
1.3 Parametriserede flader 6

2 To fundamentale matricer **9**
2.1 Krumningsfunktionerne 10
2.2 Omparametrisering 10
2.2.1 Krumningerne er bevaret ved omparametrisering 13
2.3 Skift af koordinatsystem 13
2.3.1 Krumningerne er bevaret ved skift af koordinatsystem 15

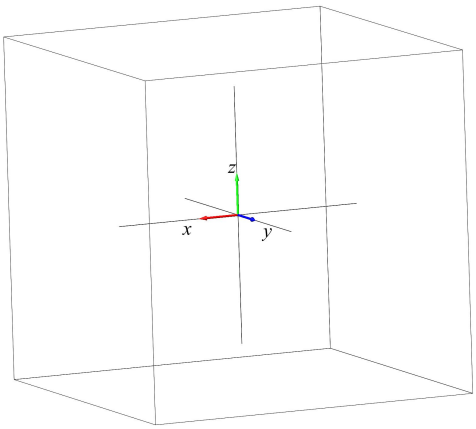
3 Lokal krumnings-analyse **17**
3.1 Tolkning af H og K via normal-snit-kurver 18
3.2 Tolkning af H og K via de principale krumninger
– og omvendt 19

Kapitel 1

Regulære flader i rummet

1.1 Det sædvanlige koordinatsystem i rummet

For effektivt at kunne beskrive hvad der foregår i rummet, og for præcist at kunne analysere hvordan en flade krummer, har vi brug for et 3D koordinatsystem. Et koordinatsystem i rummet er givet ved et fast valg af sædvanlige postivt orienterede retvinklede koordinatakser ud fra et givet fast Origo, samt de tilhørende basisvektorer i akse-retningerne: $\{O, x, y, z\}$, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Se figur 1.1.



Figur 1.1: Det sædvanlige koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$ i rummet med basisvektorer $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

1.2 Graf-flader for funktioner af to variable

Givet en funktion $f(x,y)$ af to variable. Så kan vi konstruere grafen for funktionen over (x,y)-planen i $\mathbb{R}^3$, nemlig som den flade i rummet, der består af de punkter (x,y,z) i rummet, der tilfredsstiller ligningen $z = f(x,y)$.

OPGAVE 1.1

Lad a, b, og c betegne 3 reelle tal og sæt $f(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$, hvor $(x,y) \in \mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

1. Tegn eller skitsér graf-fladen for f omkring $(0,0,0)$ ved forskellige valg af a, b, og c.
2. Bestem de partielle afledede af f til og med 2. orden i et vilkårligt givet punkt (x_0,y_0), dvs. $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$, $f''_{xx}(x_0,y_0)$, $f''_{xy}(x_0,y_0)$, og $f''_{yy}(x_0,y_0)$.
3. Beskriv tangentplanen til graf-fladen for f i punktet $(x,y,z) = (0,0,0)$.
4. Antag, at $c = 0$. For hvilke værdier af a og b ligger graf-fladen for f over, under, eller i skæring med, tangentplanen til graf-fladen for f i punktet $(x,y,z) = (0,0,0)$ – pånær lige i punktet selv, hvor graf-fladen og tangentplanen altid rører hinanden.?
5. Kan overspringes i første omgang (tages op igen i opgave 3.1) : Antag igen at c ikke nødvendigvis er 0. For hvilke værdier af a, b, og c ligger graf-fladen for f nu over, under, eller i skæring med, tangentplanen til graf-fladen for f i punktet $(x,y,z) = (0,0,0)$?

1.3 Parametriserede flader

En helt generel parametriseret flade er givet ved en vektorfunktion $\boldsymbol{r}(u,v)$, som afbilder et parameter-område $\mathcal{U}$ i $\mathbb{R}^2$ ind i rummet via tre koordinatfunktioner, h, g, og f, som alle tre er funktioner af de to variable u og v:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (h(u,v), g(u,v), f(u,v)) \quad , \quad (u,v) \in \mathcal{U} \quad . \tag{1.1}$$

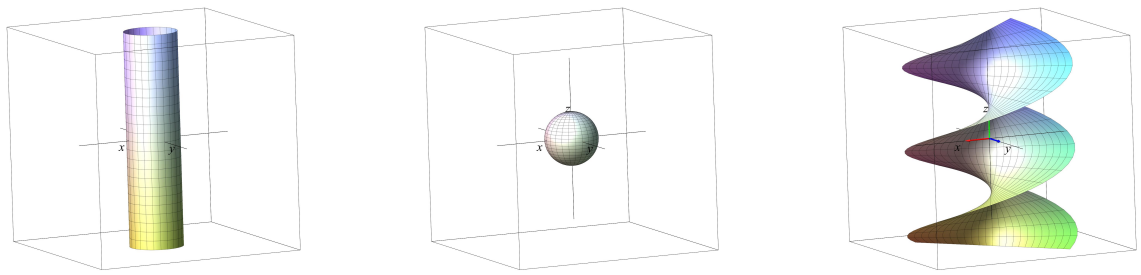
Eksempel 1.2

Graf-flader er parametriserede flader. For eksempel fås samme flade som i opgave 1.1 ved parameter-fremstillingen: $\boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,f(u,v))$, dvs. ved blot at bruge de to simple funktioner $h(u,v) = u$, og $g(u,v) = v$ og så iøvrigt lade f betegne den samme funktion som i opgaven.

Eksempel 1.3

Her er nogle klassiske eksempler på parametriserede flader:

$$
\begin{aligned}
1.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,u^2+v^2) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
2.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,u\cdot v) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
3.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u+v,u-v,u) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
4.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u+v,u-v,u\cdot v) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\
5.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (\cos(v),\sin(v),u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \,]-\pi,\pi[\\
6.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (\cos(u)\cos(v),\cos(u)\sin(v),\sin(u)) \quad , \quad u \in \,]-\pi/2,\pi/2[\quad , \quad v \in \,]-\pi,\pi[\\
7.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (v\cos(u),v\sin(u),u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \mathbb{R} \\
8.: &\quad \boldsymbol{r}(u,v) = (u\cos(v),u\sin(v),u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \quad , \quad v \in \,]-\pi,\pi[\quad .
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$



Figur 1.2: Et par af fladerne fra listen i eksempel 1.3

OPGAVE 1.4

Tegn selv eller skitsér (passende dele af) de givne flader i eksempel 1.3. Der er et par af de angivne 8 flader, som har konstant krumning; det kan ses allerede før vi præcis ved hvad krumning er eller betyder. Hvilke flader er der mon tale om?

OPGAVE 1.5

Hvilke parametriseringer svarer til hvilke flader i figur 1.2?

Hver enkelt af de tre funktioner h, g, og f i den generelle parameterfremstilling (1.1) antages at være pæne funktioner som i de ovenstående eksempler. Så kan de – og dermed $\boldsymbol{r}(u,v)$ – differentieres partielt med hensyn til u og v. For eksempel er:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (h'_u(u,v),g'_u(u,v),f'_u(u,v)) \quad , \\
\boldsymbol{r}''_{vu}(u,v) &= (h''_{uv}(u,v),g''_{uv}(u,v),f''_{uv}(u,v)) \quad \text{etc.}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Specielt har vi brug for følgende ekstra betingelse, som sikrer, at fladerne har veldefinerede tangent-planer:

Definition 1.6 Parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u,v)$ siges at være en regulær parameterfremstilling hvis følgende krydsprodukt ikke er nul-vektoren:

$$\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v) \neq \mathbf{0} \quad \text{for alle} \quad (u,v) \in \mathcal{U} \quad . \tag{1.4}$$

OPGAVE 1.7

Vis, at alle graf-flade-parametriseringer er regulære. Vink: Krydsproduktet af $(1,0,\alpha)$ med $(0,1,\beta)$ er $(-\alpha,-\beta,1)$.

OPGAVE 1.8

Hvilke af parameterfremstillingerne i eksempel 1.3 er regulære?

OPGAVE 1.9

Hvorfor sikrer regularitetsbetingelsen, at den parametriserede flade har en veldefineret tangent-planer i ethver punkt?

Regularitet giver i punktet $\boldsymbol{r}(u,v)$ en tangentplan, som har enheds-normalvektoren:

$$\boldsymbol{N}(u,v) = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{\|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v\|} \tag{1.5}$$

OPGAVE 1.10

Bestem enhedsnormalvektoren $\boldsymbol{N}(0,0)$ i punktet $\boldsymbol{r}(0,0)$ for enhver af de regulære flader i eksempel 1.3. Hvad er så en tilsvarende ligning for tangentplanen i det punkt på de enkelte flader?

Kapitel 2

To fundamentale matricer

Vi kan nu rent formelt definere to (2×2)-matricer som viser sig at være altafgørende for krumningsberegningerne:

Definition 2.1 Lad $\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in \mathcal{U}$, være en regulær parameterfremstilling. Så definerer vi to (2×2)-matricer i ethvert punkt $\boldsymbol{r}(u,v)$ på fladen, dvs. for ethvert par af parameter-værdier (u,v):

$$\mathcal{F}_I(u,v) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_u & \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v \\ \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_u & \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix} \quad , \tag{2.1}$$

og

$$\mathcal{F}_{II}(u,v) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}''_{uu} \cdot \boldsymbol{N}(u,v) & \boldsymbol{r}''_{uv} \cdot \boldsymbol{N}(u,v) \\ \boldsymbol{r}''_{vu} \cdot \boldsymbol{N}(u,v) & \boldsymbol{r}''_{vv} \cdot \boldsymbol{N}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(u,v) & M(u,v) \\ M(u,v) & N(u,v) \end{bmatrix} \quad , \tag{2.2}$$

hvor vi samtidig dermed har defineret 6 nye funktioner af to variable $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$, $L(u,v)$, $M(u,v)$, og $N(u,v)$. Matrix-funktionen $\mathcal{F}_I(u,v)$ kaldes første fundamentalform-matricen for $\boldsymbol{r}(u,v)$, og matrix-funktionen $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ kaldes anden fundamentalform-matricen for $\boldsymbol{r}(u,v)$.

Bemærk, at $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ begge er symmetriske matricer – det er de fordi der gælder: $\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v = \boldsymbol{r}'_v \cdot \boldsymbol{r}'_u$ og $\boldsymbol{r}''_{uv} = \boldsymbol{r}''_{vu}$. Den sidste ligning gælder altid når blot $\boldsymbol{r}(u,v)$ er passende mange gange differentiabel; det er en god ide at checke dette i de konkrete tilfælde i næste opgave:

OPGAVE 2.2

Find de to fundamentale matrix-funktioner $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ for hver enkelt af de regulære flader i eksempel 1.3, og beregn i hvert enkelt tilfælde de to funktioner:

$$\begin{aligned} K(u,v) &= \operatorname{Det}\left((\mathcal{F}_I(u,v))^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II}(u,v)\right) \quad \text{og} \\ H(u,v) &= \frac{1}{2} \operatorname{Spor}\left((\mathcal{F}_I(u,v))^{-1} \cdot \mathcal{F}_{II}(u,v)\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1 Krumningsfunktionerne

Definition 2.3 De to funktioner, som er defineret helt generelt i ligning (2.3), kaldes henholdsvis Gauss-krumningen $K(u,v)$ af fladen med parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u,v)$ og middel-krumningen $H(u,v)$ af fladen.

De to krumningsfunktioner kan beregnes direkte ud fra de 6 funktioner $E(u,v),\ldots,N(u,v)$:

$$\begin{aligned} K(u,v) &= \frac{L(u,v)N(u,v)-M^2(u,v)}{E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v)} \quad , \\ H(u,v) &= \frac{L(u,v)G(u,v)-2M(u,v)F(u,v)+N(u,v)E(u,v)}{2(E(u,v)G(u,v)-F^2(u,v))} \quad . \end{aligned} \tag{2.4}$$

OPGAVE 2.4

Benyt definitionerne i ligning (2.3) og udtrykkene for $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ til at vise de to udtryk i ligning (2.4).

Resten af denne note går nu ud på at indse og illustrere to ting – dels at de to funktioner $K(u,v)$ og $H(u,v)$ virkelig indeholder informationer om fladen (via parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}(u,v)$) som med rimelighed kan siges at beskrive *fladens krumning* – og dels at de to funktioner er uafhængige af den valgte parametrisering og uafhængige af det valgte koordinatsystem. Dermed er de ægte geometriske størrelser, der kun afhænger af fladens geometri. Den sidste påstand er helt afgørende, for den betyder, at vi selv kan vælge hvilken parametrisering og hvilket koordinatsystem vi vil bruge til at beregne krumningerne for fladen og dermed også til at motivere (via krumningen af kurver på fladen) at de to funktioner virkelig har noget med krumning at gøre!

2.2 Omparametrisering

For at indse, at de to krumningsfunktioner er uafhængige af parametriseringen af den givne flade vil vi nu se på to forskellige parametriseringer af én og samme flade: $\boldsymbol{r}(u,v)$, hvor $(u,v)\in\mathcal{U}$, og $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$, hvor $(\widetilde{u},\widetilde{v})\in\widetilde{\mathcal{U}}$. Da vi antager, at $\boldsymbol{r}(u,v)$ og $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$ rammer de samme punkter på fladen i rummet, så må der være en sammenhæng mellem parametrene, dvs. en afbildning fra $\widetilde{\mathcal{U}}$ ind i $\mathcal{U}$ som fortæller hvordan u afhænger af $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ og hvordan v afhænger af $(\widetilde{u},\widetilde{v})$. Vi antager, at vi har givet eller fundet den afhængighed (ved at løse de tilsvarende ligninger) og kan derefter udtrykke sammenhængen således: $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})=\boldsymbol{r}(u(\widetilde{u},\widetilde{v}),v(\widetilde{u},\widetilde{v}))$.

Vi kan nu beregne og sammenligne $\widetilde{\mathcal{F}_I}(\widetilde{u},\widetilde{v})$ med $\mathcal{F}_I(u,v)$, og tilsvarende $\widetilde{\mathcal{F}_{II}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$ med $\mathcal{F}_{II}(u,v)$. For eksempel får vi ved at differentiere igennem med kædereglen:

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{u}} &= \boldsymbol{r}_u \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \\ \widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{v}} &= \boldsymbol{r}_u \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} + \boldsymbol{r}_v \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \quad , \end{aligned} \tag{2.5}$$

som giver:

$$\widetilde{E} = \widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{u}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{r}}_{\widetilde{u}} = E \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}}\right)^2 + 2F \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}}\right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}}\right) + G \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}}\right)^2 \quad . \tag{2.6}$$

Tilsvarende udtryk findes for $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$, og $\widetilde{N}$. Ved at omskrive de fundne sammenhænge mellem udtrykkene til matrixform fås følgende (prøv det!):

$$\begin{bmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \mathbf{J} \quad , \tag{2.7}$$

hvor $*$ betyder transponering, og hvor $\mathbf{J}$ står for (Jacobi-)matricen med de partielle afledede af u og v som funktioner af $\widetilde{u}$ og $\widetilde{v}$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \end{bmatrix} \quad . \tag{2.8}$$

Præcis den samme sammenhæng (transformationsformel) gælder for den anden fundamentalform-matrix:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^* \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \mathbf{J} \quad . \tag{2.9}$$

Men det betyder, at vi har:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}_I} &= \mathbf{J}^* \mathcal{F}_I \mathbf{J} \quad , \\ \widetilde{\mathcal{F}_{II}} &= \mathbf{J}^* \mathcal{F}_{II} \mathbf{J} \quad , \end{aligned} \tag{2.10}$$

og dermed:

$$\widetilde{\mathcal{F}_I}^{-1} \widetilde{\mathcal{F}_{II}} = \mathbf{J}^{-1} \left(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II} \right) \mathbf{J} \quad . \tag{2.11}$$

OPGAVE 2.5

Hvordan indser vi (2.11) ud fra (2.10) ?

Eksempel 2.6

En regulær parametrisering af en flade er givet på formen:

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = (\widetilde{u}+\widetilde{v}, \widetilde{u}-\widetilde{v}, \widetilde{u}\cdot\widetilde{v}) \quad , \quad (\widetilde{u},\widetilde{v}) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{2.12}$$

En omparametrisering af fladen er dernæst givet ved:

$$\begin{aligned} u &= u(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \widetilde{u}+\widetilde{v} \\ v &= v(\widetilde{u},\widetilde{v}) = \widetilde{u}-\widetilde{v} \quad , \end{aligned} \tag{2.13}$$

således at:

$$\widetilde{u}\cdot\widetilde{v} = \frac{1}{4}\left(u^2-v^2\right) \quad , \tag{2.14}$$

og dermed

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (u, v, \frac{1}{4}\left(u^2-v^2\right)) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{2.15}$$

De to forskellige parametriseringer af den samme flade i rummet er vist i figur 2.1. Jacobi-matricen for omparametriseringen er i dette eksempel

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.16}$$

Ved udregning af de fundamentalmatricerne får vi henholdsvis:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}_I(\widetilde{u},\widetilde{v}) &= \begin{bmatrix} 2+\widetilde{v}^2 & \widetilde{u}\widetilde{v} \\ \widetilde{u}\widetilde{v} & 2+\widetilde{u}^2 \end{bmatrix} \\ \mathcal{F}_I(u,v) &= \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{4}u^2 & -\frac{1}{4}uv \\ -\frac{1}{4}uv & 1+\frac{1}{4}v^2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ved dernæst at bruge (2.13) fås netop at ligningen fra (2.10) er opfyldt:

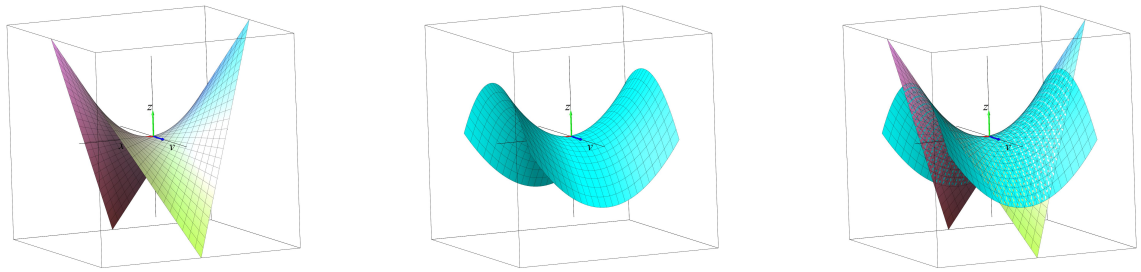
$$\widetilde{\mathcal{F}}_I = \mathbf{J}^* \mathcal{F}_I \mathbf{J} \quad . \tag{2.18}$$

Tilsvarende kan den anden ligning i (2.10) checkes i dette konkrete tilfælde:

$$\widetilde{\mathcal{F}_{II}} = \mathbf{J}^* \mathcal{F}_{II} \mathbf{J} \quad . \tag{2.19}$$

OPGAVE 2.7

Hvilken parametrisering er brugt i delfigur 2 fra venstre i figur 2.1? Er det $\boldsymbol{r}(u,v)$ eller $\widetilde{\boldsymbol{r}}(\widetilde{u},\widetilde{v})$?



Figur 2.1: Samme flade parametriseret på to forskellige måder, se eksempel 2.6

2.2.1 Krumningerne er bevaret ved omparametrisering

OPGAVE 2.8

Tag determinanten på begge sider af (2.11) og vis dermed, at Gauss-krumningen er uafhængig af parametriseringen, $\widetilde{K}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = K(u,v)$. Og det var noget af det vi gerne ville vise!

OPGAVE 2.9

Vis på tilsvarende måde, at $\widetilde{H}(\widetilde{u},\widetilde{v}) = H(u,v)$. Vink: Vis først, eller benyt, at Spor $\left(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{J}\right) =$ Spor $(\mathbf{B})$ for alle matricer $\mathbf{B}$.

Dermed har vi vist det ønskede, nemlig at de to funktioner $K(u,v)$ og $H(u,v)$ er invariante ved omparametrisering.

2.3 Skift af koordinatsystem

Funktionerne $K(u,v)$ og $H(u,v)$ er også uafhængige af det koordinatsystem, som vi udtrykker parameterfremstillingen i. Det er noget lettere at se end uafhængigheden af parametriseringen:

Vi vælger et nyt positivt orienteret koordinatsystem i rummet med nye retvinklede koordinatakser ud fra et nyt Origo, $\widehat{O}$, samt tilhørende nye basisvektorer i akse-retningerne: $\{Q,\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z}\}$, $\{\widehat{\mathbf{i}},\widehat{\mathbf{j}},\widehat{\mathbf{k}}\}$ så vil en vektor $\mathbf{v}$ med koordinaterne $(v_1,v_2,v_3)_{\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}}$ med hensyn til det oprindelige koordinatsystem have de nye koordinater $(\widehat{v}_1,\widehat{v}_2,\widehat{v}_3)_{\{\widehat{\mathbf{i}},\widehat{\mathbf{j}},\widehat{\mathbf{k}}\}}$ med hensyn til det nye koordinatsystem, og sammenhængen kan igen udtrykkes ved en matrix $\mathbf{R}$:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}\begin{bmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{og dermed} \quad \begin{bmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \widehat{v}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad . \tag{2.20}$$

Søjle-elementerne i matricen $\mathbf{R}$ er de nye basisvektorers koordinater med hensyn til den oprindelige basis $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$. Da de nye basisvektorer er ortogonale på hinanden og alle har længden 1, så er $\mathbf{R}^*\mathbf{R} = \mathbf{E}$ og derfor er $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$ og determinanten er $\mathrm{Det}(\mathbf{R}) = 1$ (på grund af den positive orientering af koordinatsystemet).

OPGAVE 2.10

Brug matrix-multiplikation til at indse den påstand. Altså: hvis en matrix har positivt orienterede parvis ortogonale enhedssøjler, så er den inverse matrix lig med den transponerede matrix.

Definition 2.11 En (3×3)-matrix $\mathbf{R}$ med positivt orienterede ortogonale enhedssøjler kaldes en rotationsmatrix.

Påstand 2.12 En rotationsmatrix bevarer prikproduktet mellem vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$.

Vi vil vise, at skalarprodukterne $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ og $\widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{b}}$ har samme værdi:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{b}} \quad . \tag{2.21}$$

Ligningen (2.20) kan 'skrives ud' på følgende måde (vi bruger, at $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{a}_1 \\ \widehat{a}_2 \\ \widehat{a}_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^* \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ \widehat{b}_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}^* \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Hvis vi transponerer på begge sider af lighedstegnene får vi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \widehat{a}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R} \\ \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 & \widehat{b}_2 & \widehat{b}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R} \quad , \end{aligned} \tag{2.23}$$

Vis nu først, at skalarprodukterne $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ og $\widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{b}}$ kan skrives som matrix-produkter:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} \widehat{a}_1 & \widehat{a}_2 & \widehat{a}_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ \widehat{b}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad ,\end{aligned} \tag{2.24}$$

Af disse ligninger fås det ønskede ved at bruge $\mathbf{R}\mathbf{R}^* = \mathbf{E}$:

$$\widehat{\mathbf{a}}\cdot\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad . \tag{2.25}$$

2.3.1 Krumningerne er bevaret ved skift af koordinatsystem

Hvis vi har givet en parametrisering $\boldsymbol{r}(u,v)$ for en given flade med hensyn til det oprindelige koordinatsystem, så er parametriseringen af den samme flade udtrykt i den nye basis givet ved $\widehat{\boldsymbol{r}}(u,v)$ som fremkommer ved translation med vektoren $\mathbf{k}$ fra O til $\widehat{O}$ og rotation:

$$\widehat{\boldsymbol{r}}^*(u,v) = \mathbf{R}^*(\boldsymbol{r}^*(u,v) - \boldsymbol{k}^*) \quad . \tag{2.26}$$

Heraf fås de partielle afledede, f.eks. den u-afledede

$$\widehat{\boldsymbol{r}}_u^{*\prime}(u,v) = \mathbf{R}^*(\boldsymbol{r}_u^{*\prime}(u,v)) \quad \text{etc.} \quad . \tag{2.27}$$

Da rotationer bevarer prikprodukter og da $\mathcal{F}_I(u,v)$ og $\mathcal{F}_{II}(u,v)$ består af lutter prikprodukter følger endelig, at en parametrisering der udtrykkes i to forskellige koordinatsystemer har helt *ens* første og anden fundamentalform-matricer: $\widehat{\mathcal{F}_I}(u,v) = \mathcal{F}_I(u,v)$ og $\widehat{\mathcal{F}_{II}}(u,v) = \mathcal{F}_{II}(u,v)$.

Vi er nu klar til at beregne og inspicere de to krumningsfunktioner i det simplest mulige koordinatsystem med den simplest mulige parametrisering, nemlig i den situtation, hvor fladen lokalt repræsenteres som graf-flade for en funktion af to variable.

Kapitel 3

Lokal krumnings-analyse

For en graf-flade parametrisering er beregningerne af $K(u,v)$ og $H(u,v)$ særligt simple, men – som vi har set – fuldt ud repræsentative. Lad os derfor betragte en vilkårlig flade og antage, at den i en omegn om et punkt p er repræsenteret ved graf-flade parametrisering efter en eventuel omparametrisering og skift af koordinatsystem:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (u,v,f(u,v)) \quad , \tag{3.1}$$

hvor f er en given funktion og således at tangentplanen i punktet p netop er (x,y)-planen og sådan at $p = (0,0,0) = \boldsymbol{r}(0,0)$. Så er

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_u(u,v) &= (1,0,f'_u(u,v)) \\
\boldsymbol{r}'_v(u,v) &= (0,1,f'_v(u,v)) \\
\boldsymbol{r}''_{uu}(u,v) &= (0,0,f''_{uu}(u,v)) \\
\boldsymbol{r}''_{uv}(u,v) &= (0,0,f''_{uv}(u,v)) \\
\boldsymbol{r}''_{vv}(u,v) &= (0,0,f''_{vv}(u,v))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}'_u(0,0) \times \boldsymbol{r}'_v(0,0) &= (-f'_u(0,0),-f'_v(0,0),1) = (0,0,1) \\
\boldsymbol{N}(0,0) &= (0,0,1) \\
\mathcal{F}_I(0,0) &= \begin{bmatrix} 1+(f'_u(0,0))^2 & f'_u(0,0)\cdot f'_v(0,0) \\ f'_u(0,0)\cdot f'_v(0,0) & 1+(f'_v(0,0))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathcal{F}_{II}(0,0) &= \begin{bmatrix} f''_{uu}(0,0) & f''_{uv}(0,0) \\ f''_{uv}(0,0) & f''_{vv}(0,0) \end{bmatrix} \\
\mathcal{F}_I^{-1}(0,0)\mathcal{F}_{II}(0,0) &= \begin{bmatrix} f''_{uu}(0,0) & f''_{uv}(0,0) \\ f''_{uv}(0,0) & f''_{vv}(0,0) \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Hvis vi introducerer r, s and t som $r = f''_{uu}(0,0)$, $s = f''_{uv}(0,0)$, og $t = f''_{vv}(0,0)$, så får vi direkte

Gauss- og middelkrumningen i punktet p:

$$\begin{aligned} K(0,0) &= r \cdot t - s^2 \\ H(0,0) &= \frac{1}{2}(r+t) \quad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

OPGAVE 3.1

I opgave 1.1 spørgsmål 5 optræder konstanterne a, b, og c. Hvad er relationen mellem dem og r, t, og s som indført ovenfor? Vis, at $K(0,0) > 0$ svarer til, at graf-fladen i den opgave ikke har skæring med sin tangentplan i punktet $(0,0,0)$ udenfor dette punkt selv.

3.1 Tolkning af H og K via normal-snit-kurver

I ovenstående situation betragter vi den familie γ_θ af kurver på fladen, som fremkommer ved at projicere de rette linjer gennem $(x,y) = (0,0)$ op på fladen ved hjælp af f:

$$\gamma_\theta(t) = (t\cos(\theta), t\sin(\theta), f(t\cos(\theta), f(t\sin(\theta))) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad . \tag{3.4}$$

For enhver fastholdt retning θ har vi en kurve γ_θ på den parametriserede graf-flade. Tangentvektoren i p svarende til $t = 0$ er følgende enhedsvektor:

$$\gamma'_\theta(0) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \tag{3.5}$$

Accelerationsvektoren i p er tilsvarende:

$$\begin{aligned} \gamma''_\theta(0) &= (0, 0, \cos^2(\theta) f''_{uu}(0,0) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) f''_{(}u,v)(0,0) + \sin^2(\theta) f''_{vv}(0,0)) \\ &= (0, 0, r\cos^2(\theta) + 2s\cos(\theta)\sin(\theta) + t\sin^2(\theta)) \quad , \end{aligned} \tag{3.6}$$

Det betyder, at *krumningen* af kurven $\gamma_\theta(t)$ på graf-fladen har følgende værdi i punktet p (regnet med fortegn i normalens retning $(0,0,1)$):

$$\kappa_n(\theta) = r\cos^2(\theta) + 2s\cos(\theta)\sin(\theta) + t\sin^2(\theta) \quad . \tag{3.7}$$

Dette er Euler's formel for normal-snit-krumningen af den parametriserede flade i retningen givet ved θ. Den udtrykker præcis det ønskede, nemlig en sammenhæng mellem fladens krumningsfunktioner K og H og krumningerne af kurver (i dette tilfælde normal-snitkurver) på fladen. Funktionen $\kappa_n(\theta)$ har et maksimum κ_1 og et minimum κ_2, og de optræder for $\theta = \theta_1$ og $\theta = \theta_2$ hvor henholdsvis:

$$\tan(2\theta_1) = \frac{2s}{r-t} \quad \text{og} \quad \tan(2\theta_2 + \pi) = \frac{2s}{r-t} \quad , \tag{3.8}$$

således at der er præcis vinklen $\pi/2$ mellem de to θ-værdier.

OPGAVE 3.2

Vis, at der er maksimum, henholdsvis minimum, for $\kappa_n(\theta)$ i de to angivne θ-værdier via (3.8).

3.2 Tolkning af H og K via de principale krumninger – og omvendt

De to værdier, maksimumværdien og minimumværdien for $\kappa_n(\theta)$ betegnes med κ_1 og κ_2 henholdsvis, og de kaldes de principale krumninger for fladen i punktet p.

Ved at benytte θ_1 som ny origo på θ-aksen, dvs. ved at substituere θ med $\phi = \theta - \theta_1$ fås:

$$\kappa_n(\phi) = \kappa_1 \cos^2(\phi) + \kappa_2 \sin^2(\phi) \quad . \tag{3.9}$$

OPGAVE 3.3

Vis, at

$$\begin{aligned} \kappa_1 \cdot \kappa_2 &= r \cdot t - s^2 = K(0,0) \\ \kappa_1 + \kappa_2 &= r + t = 2H(0,0) \quad . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Krumningsfunktionerne K og H kan altså bestemmes direkte ud fra kendskab til de principale krumninger. Omvendt kan hver af de to principale krumning bestemmes ud fra H og K. De er nemlig rødderne i andengradsligningen:

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0 \quad . \tag{3.11}$$

OPGAVE 3.4

Vis den påstand, altså at κ_1 og κ_2 netop er rødderne i (3.11).

OPGAVE 3.5

Find de principale krumninger i punktet $\boldsymbol{r}(0,0)$ for hver af de regulære flader i eksempel 1.3 ved at bruge de fundne værdier af $K(0,0)$ og $H(0,0)$ fra opgave 2.2.

Litteratur

[doC] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[G] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Matematica*, 2. ed., CRC Press, 1998.

[GFLB] B. Grøn, B. Felsager, B. Bruun, O. Lyndrup, *Hvad er matematik? A*, Lindhardt og Ringhof, 2013.

[MG] *Video og projekt-materialer om skumstrukturer og minimalflader* v./ B. Grøn et al.: http://gymportalen.dk/10danskematematikere10matematiskefortaellinger/31634

[Mac] MacTutor History of Mathematics, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/

[Maple] Maple's hjemmeside http://www.maplesoft.com/

[P] A. Pressley, Elementary Differential Geometry, Springer, 2010.

Indeks

ægte geometriske størrelser, 10

anden fundamentalform-matricen, 9

basisvektorer i akse-retningerne, 5, 13

enheds-normalvektoren, 8
Et koordinatsystem i rummet, 5
Euler's formel for normal-snit-krumningen, 18

første fundamentalform-matricen, 9

Gauss-krumningen, 10
grafen for funktionen, 6

koordinatakser, 5, 13

ligning for tangentplanen, 8

middel-krumningen, 10

principale krumninger, 19

regulær parameterfremstilling, 8
rotationsmatrix, 14

tre koordinatfunktioner, 6

uafhængige af den valgte parametrisering, 10
uafhængige af det valgte koordinatsystem, 10

vektorfunktion, 6

DTU COMPUTE
BYGNING 303B, 2800 KGS. LYNGBY.
E-mail adresse: stema@dtu.dk