

---

# GEOMETRISKE OPERATIONER I PLAN OG RUM

STEEN MARKVORSEN

DTU COMPUTE 2014



# Indhold

<b>1</b>	<b>Trekanter</b>	<b>7</b>
1.1	Det sædvanlige koordinatsystem i planen	8
1.2	Trekanter	10
1.2.1	Arealet af en plan trekant	11
1.2.2	De indre vinkler i en trekant	13
1.2.3	Orientering af en plan trekant	14
1.3	Areal versus omkreds	15
1.3.1	Heron's formel	17
<b>2</b>	<b>2D Matrix-operationer</b>	<b>19</b>
2.1	Algebraisk opsætning	19
2.2	Geometrisk tolkning	21
2.2.1	Hele trekanten deformeres	22
2.2.2	Rotationer	23
2.2.3	Skaleringer i koordinatakseretningerne	24
2.2.4	Flip	24
2.3	Hovedsætning for 2D (deformations-)matricer	25
2.4	Hvordan dekomponeres en matrix?	27
2.5	Deformations-energi	31
<b>3</b>	<b>Tetraedre</b>	<b>35</b>
3.1	Det sædvanlige koordinatsystem i rummet	35
3.1.1	Tetraedre	36
3.2	Arealet af trekanter i rummet	37
3.3	Rumfang af tetraedre	40
3.4	Orientering af tetraeder ved valg af treben	44
3.5	Rumfang versus overfladeareal	45
<b>4</b>	<b>3D Matrix-operationer</b>	<b>47</b>
4.1	Geometrisk tolkning af 3D matrix-operationer	48
4.1.1	Hele tetraederet deformeres	49
4.1.2	Skaleringer i akseretningerne	49

4.1.3	Flip	50
4.1.4	Rotationer i 3D rummet	51
4.2	Hovedsætningen for 3D (deformations-)matricer	54
4.3	Konstruktion af tetraedre, energi	59
4.4	Den generelle SVD hovedsætning for $(m \times n)$ -matricer	60
4.5	Den generelle SVD delt i to	61
4.5.1	SVD for regulære kvadratformede matricer	62
4.5.2	SVD for alle de andre matricer	63
4.6	Eksempler på brug af den generelle SVD	65
4.7	Bevis for SVD for regulære matricer	71
<b>5</b>	<b>Deformation af generelle tetraedre</b>	<b>73</b>
5.1	Bestemmelse af deformationsmatrix og flytningsvektor	73
5.2	Markerede og u-markerede tetraedre	77
5.3	Deformation af trekanter i rummet	78
<b>6</b>	<b>Geometrisk dynamik i 2D</b>	<b>83</b>
6.1	Tidsparametriserede plane kurver	83
6.2	Samtidig bevægelse og deformation af trekant	84
6.3	Det medfølgende hængsel	87
6.4	Sweeping ind i rummet	89
<b>7</b>	<b>Geometrisk dynamik i 3D</b>	<b>95</b>
7.1	Samtidig bevægelse og deformation af tetraeder	97
7.2	Differentiation af tidsafhængig rotationsmatrix	98
7.3	Skævsymmetriske matricer	100
7.3.1	Akse-vektorer og akse-matricer	101
7.4	Tidsafhængige rotationsmatricer	104
7.4.1	Rotationer med given akse-vektor-funktion	105
7.5	Outlook	110
<b>8</b>	<b>Styring langs krumme kurver</b>	<b>113</b>
8.1	Tids-parametriserede regulære kurver	113
8.2	Buelængde-parametriserede kurver	115
8.2.1	Hvordan omparametriseres til buelængde?	117
8.3	Krumning og torsion	121
8.3.1	Krumning	122
8.3.2	Torsion	124
8.3.3	Opsamling	126
8.3.4	Den lokale kurve-form	127
8.4	Krumning og torsion for tids-parametriserede kurver	132
8.4.1	Krumning, torsion og Frenet–Serret basis for tidsparametriserede kurver	132
8.4.2	Approksimerende vindellinjer	134

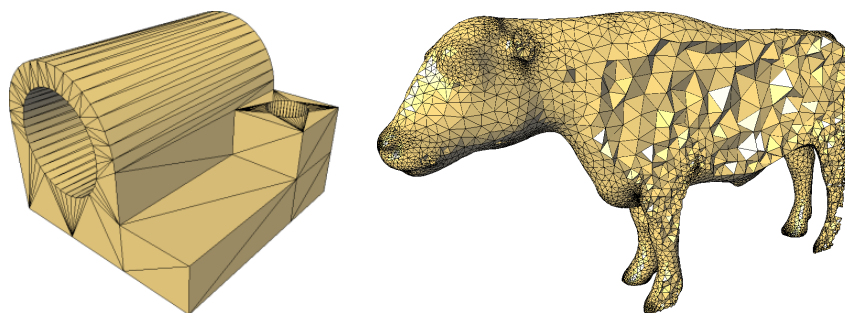
8.4.3	SI-enheden for krumning og torsion . . . . .	139
8.5	Plane kurver . . . . .	139
8.5.1	Plane kurver – i $(x,y)$ -planen . . . . .	141
8.5.2	Plane kurver med givne krumningsfunktioner $\kappa_{\pm}(s)$ . . . . .	142
8.6	Frenet-Serret styring af et basistetraeder . . . . .	145
<b>9</b>	<b>Medfølgende tetraederrum</b> . . . . .	<b>151</b>
9.1	Koordinat- og basis-skift . . . . .	151
9.2	Hastighedsfeltet for det medfølgende rum . . . . .	156
9.3	Karakterisering af hastighedsfeltet . . . . .	159
9.3.1	Øjeblikkelig parallelforskydning . . . . .	159
9.3.2	Øjeblikkelig skrue-bevægelse . . . . .	159
9.4	Hovedresultat for roterende bevægelser . . . . .	162
9.5	Frenet–Serret skrue-data . . . . .	165
9.6	Styring med givne skrue-data . . . . .	167
9.7	Skruebevægelser med fast akse . . . . .	173
9.8	Rodrigues’ formel . . . . .	175
<b>10</b>	<b>Formning og design via Cosserat-sweeping</b> . . . . .	<b>179</b>
10.1	Kurver . . . . .	180
10.1.1	Længde af kurver . . . . .	183
10.2	Flader . . . . .	186
10.2.1	Areal af flader . . . . .	187
10.3	Cosserat-sweeping med kurver . . . . .	188
10.4	Rumlige områder . . . . .	194
10.4.1	Rumfang af rumlige områder . . . . .	195
10.5	Cosserat-sweeping med flader . . . . .	196



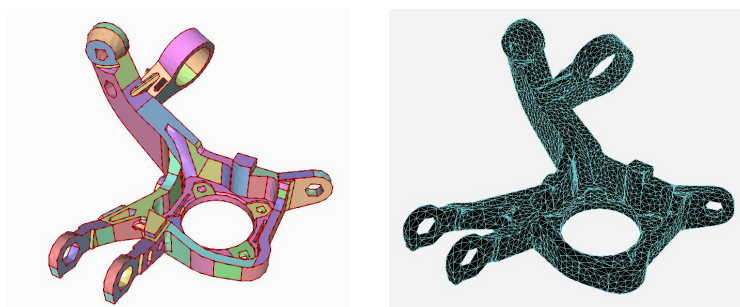
## ||| Kapitel 1

# Trekanter

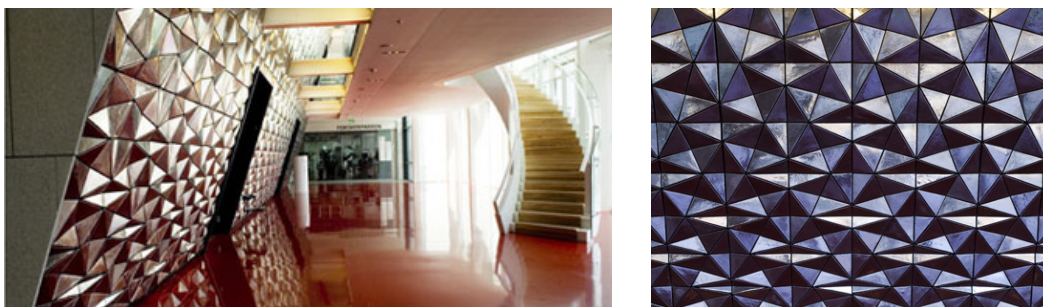
**Trekanter** er nogle af de mest grundlæggende - og mest anvendte - geometriske objekter, se figurerne. Men hvad er en trekant egentlig? Vi ser først på trekantede i planen. Dertil har vi brug for et koordinatsystem.



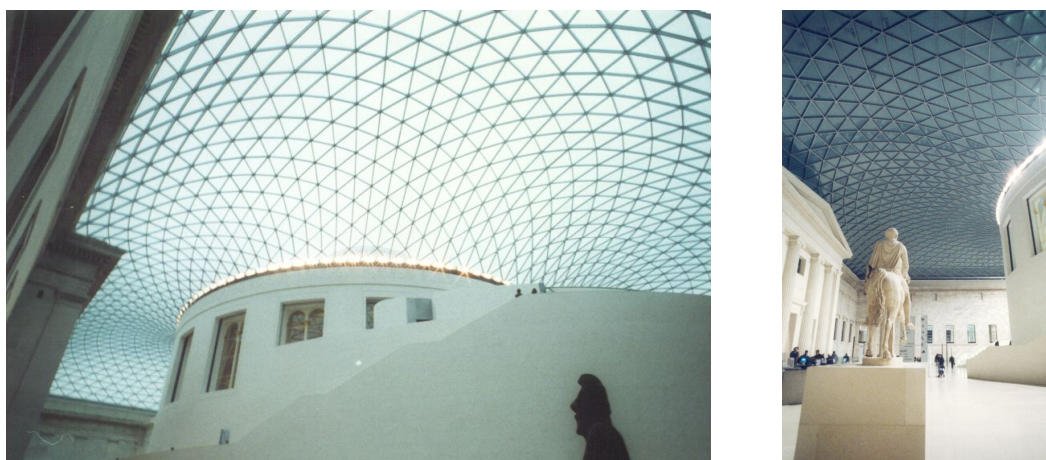
Figur 1.1: Trekantede en masse.



Figur 1.2: Et maskin-element og en tilhørende triangulering.



Figur 1.3: Værk af Olafur Eliasson ved indgangen til koncertsalen på Alston: *Music Wall*.



Figur 1.4: Dag og nat i *British Museum Great Court*.

## 1.1 Det sædvanlige koordinatsystem i planen

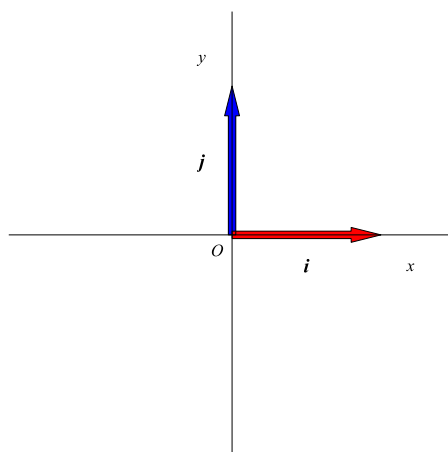
**Koordinatsystemet i planen** er nagelfast og givet ved de sædvanlige retvinklede **koordinataksler** ud fra et givet fast punkt  $O$ , som vi kalder **Origo**, samt de tilhørende **basisvektorer**, som er enhedsvektorer i aksernes retninger:  $\{O, x, y\}$ ,  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ . Se figur 1.5.

Med et således fast valgt koordinatsystem kan vi beskrive præcist hvor et punkt  $p$  i planen er placeret, nemlig ved hjælp af punktets to  $(x, y)$ -koordinater  $(p_1, p_2)$  i det givne koordinatsystem. Og vi kan på samme måde fortælle præcis hvilken vektor  $\mathbf{a}$ , der forbinder et punkt  $p = (p_1, p_2)$  med et andet punkt  $q = (q_1, q_2)$ , nemlig ved hjælp af den vektors koordinater med hensyn til den givne sædvanlige basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2) \quad . \quad (1.1)$$

Læg mærke til, at en vektor  $\mathbf{a}$  altså er en **pil** med et **fodpunkt** (i dette tilfælde  $p$ ) og et **spidspunkt**

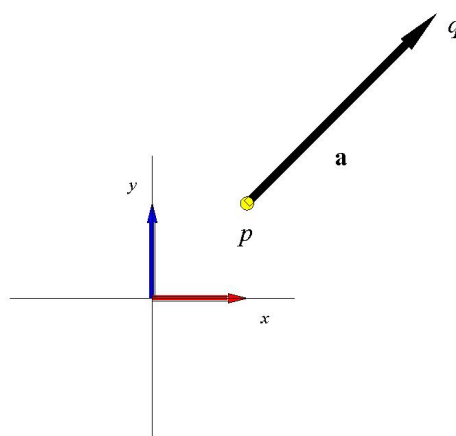




Figur 1.5: Det sædvanlige koordinatsystem  $\{O, x, y\}$  i planen med basisvektorer  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ .

(i dette tilfælde  $q$ ). Spidspunktets koordinater kan beregnes ved at addere fodpunktets koordinater til vektorens koordinater. Og fodpunktets koordinater kan beregnes ved at trække vektorens koordinater fra spidspunktets koordinater. Se figur 1.6.

Den vektor som har fodpunkt  $O$  og spidspunkt  $p$  vil vi skrive  $\mathbf{p}$  og kalde **stedvektoren** for punktet  $p$ . Når punktet  $p$  har koordinaterne  $(p_1, p_2)$  med hensyn til koordinatsystemet  $\{O, x, y\}$  så har  $\mathbf{p}$  selvsagt koordinaterne  $(p_1, p_2)$  med hensyn til basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ .



Figur 1.6: Vektoren  $\mathbf{a} = (2, 2)$  med fodpunkt  $p = (1, 1)$  og spidspunkt  $q = (3, 3)$ .

Vi vil ret tit i det følgende få brug for at skrive vektorer på 'højkant', dvs. som **koordinat-søjle-**

**matricer**. For at se forskel sætter vi en stjerne på:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2) \\ \mathbf{a}^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Det svarer til at **transponere** koordinat-række-matricen  $[a_1 \ a_2]$  til den viste koordinat-søjle-matrix.

## 1.2 Trekanter

Som navnet siger er en trekant givet ved sine tre kanter! Men for at være helt præcis: Ved en trekant vil vi forstå det udfyldte område i planen, som er afgrænset af trekantens kanter.

Når vi har et fast valgt koordinatsystem til rådighed i planen, vil vi benytte det til at beskrive trekantene i den plan. Det kan vi gøre på mange måder. Een måde er at angive koordinaterne for trekantens tre **hjørnepunkter**,  $p$ ,  $q$ , og  $r$ . En anden, som vi for det meste vil benytte her, er at angive eet hjørnepunkt  $p$  og de to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ , der har fælles fodpunkt  $p$ , men som har de to andre hjørnepunkter i trekanten som spidspunkter. Se figur 1.8.

En trekant, der er beskrevet og fastlagt i planen på den måde vil vi betegne med

$$\Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) . \quad (1.3)$$

Bemærk, at for hver trekant er der 3 valgmuligheder for valg af det fælles fodpunkt og for hvert valg af fodpunkt er der dernæst to muligheder for at vælge *rækkefølgen* af de to **kant-vektorer**  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ . Det vil sige, at en given trekant kan skrives på formen (1.3) på 6 forskellige måder.

### ||| OPGAVE 1.1

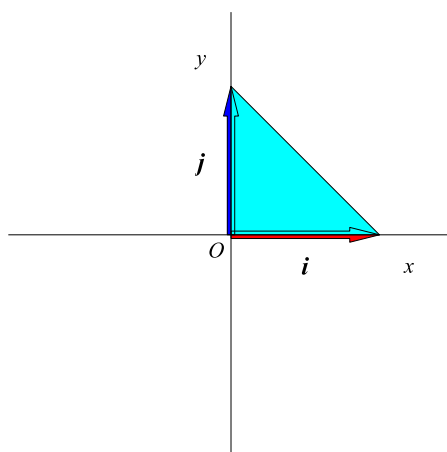
Vi ser på den trekant, der er givet ved de tre punkter, der i planen har følgende koordinater med hensyn til det valgte sædvanlige retvinklede koordinatsystem:

$$p = (1, 1) \quad , \quad q = (2, 3) \quad , \quad r = (3, 2) . \quad (1.4)$$

Find alle 6 muligheder for at skrive den trekant på formen (1.3). Vink: Een af mulighederne er

$$\Delta = \Delta((3, 2), (-2, -1), (-1, 1)) . \quad (1.5)$$

En meget speciel trekant er **basistrekanten** med de tre hjørnepunkter  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ , og  $(0, 1)$ , se figur 1.7.

Figur 1.7: Basistrekanten i planen:  $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ .

### ||| OPGAVE 1.2

Find alle 6 muligheder for at skrive basistrekanten på formen (1.3). Vink: Een af dem er

$$\triangle = \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \triangle((0,0), (1,0), (0,1)) \quad . \quad (1.6)$$

### ||| OPGAVE 1.3

Find alle 5 alternative muligheder for at skrive den trekant, der er vist i figur 1.8 på formen (1.3). Trekanten er allerede 'vist' i figuren på formen:

$$\triangle = \triangle((1,1), (2,2), (-2,1)) \quad . \quad (1.7)$$

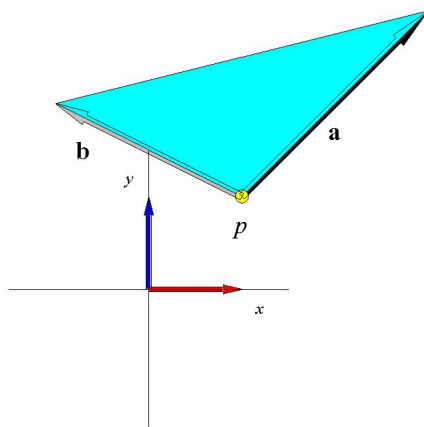
Man kan med nogen ret spørge: Hvorfor alt det bøvl med 6 forskellige måder at skrive en og samme trekant på, når vi kan nøjes med een måde, nemlig den der bare angiver en liste med de tre hjørnepunkter?

Det er fordi **vinklerne** i trekanten, **arealet** af trekanten, og **orienteringen** af trekanten ligger 'indbygget' i kant-vektorerne og kan let bestemmes direkte (ved simple formler) ud fra dem. Det vil vi nu præcisere og give eksempler på.

#### 1.2.1 Arealet af en plan trekant

Arealet af en trekant er som bekendt halvdelen af grundlinjen gange højden. For en trekant  $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  kan vi vælge længden  $\|\mathbf{a}\|$  af  $\mathbf{a}$  som grundlinje. Og højden i trekanten er

$$\|\mathbf{b}\| \sin(\theta) = |(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}}) / \|\hat{\mathbf{a}}\|| \quad , \quad (1.8)$$



Figur 1.8: En trekant i planen givet ved  $\triangle = \triangle((1,1), (2,2), (-2,1))$ .

hvor  $\theta$  er vinklen mellem de to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ , og hvor  $\hat{\mathbf{a}}$  betegner **tværvektoren** i planen til  $\mathbf{a}$  (tværvektorens koordinater er  $\hat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1)$ ). Derfor er arealet:

$$\begin{aligned}
 \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) &= \frac{1}{2} |\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}}| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot |a_1 b_2 - a_2 b_1| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left| \det \left( \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right) \right| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left| \det([\mathbf{a}^* \ \mathbf{b}^*]) \right| .
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Med andre ord: Arealet af trekant  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  er den numeriske værdi af den halve determinant af den  $2 \times 2$  matrix, der fås ved at sætte  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  ind som søjler i matricen.

Nu kan der jo forekomme **kollapsede trekanter** med areal 0, og determinant 0 (hvordan?) - men det vil vi helst ikke tillade, så derfor definerer vi:

||| **Definition 1.4** En **regulær trekant** er en trekant, der har et egentligt areal, altså et areal, der er skarpt større end 0.

||| **Sætning 1.5** En trekant er regulær hvis og kun hvis alle trekantens kantlængder og vinkler er positive.

### OPGAVE 1.6

|| Kan du bevise påstanden i Sætning 1.5? Eller er det bare klart?

### OPGAVE 1.7

Hvilke af følgende trekanter er regulære?

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta((1,1), (4,-2), (8,4)) \\ \Delta_2 &= \Delta((1,3), (4,-2), (-8,4)) \\ \Delta_3 &= \Delta((3,1), (9,123), (123,9)) \\ \Delta_4 &= \Delta(O, \mathbf{j}, \mathbf{i}) \quad .\end{aligned}\tag{1.10}$$

## 1.2.2 De indre vinkler i en trekant

En trekant har en **indre vinkel** ved hvert af sine tre hjørnepunkter. Vinklen (målt i radianer) er en værdi imellem 0 og  $\pi$  og kan findes ved hjælp af de to kant-vektorer, der udgår fra hjørnet. Lad os sige, at vi er interesserede i at bestemme den indre trekantsvinkel ved punktet  $p$  i den trekant, der har fremstillingen  $\Delta = \Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Den vinkel vil vi betegne med  $\theta_p = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  og den kan bestemmes ud fra de to kant-vektorer:

$$\cos(\theta_p) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\tag{1.11}$$

sådan at

$$\theta_p = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right) \quad .\tag{1.12}$$

Lad nu  $q$  betegne det hjørnepunkt i  $\Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , som er spidspunkt for  $\mathbf{a}$  og lad  $r$  betegne det hjørnepunkt, som er spidspunkt for  $\mathbf{b}$ . Så har vi tilsvarende:

$$\begin{aligned}\theta_q &= \angle(-\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \arccos\left(\frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|}\right) \\ \theta_r &= \angle(-\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) = \arccos\left(\frac{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|}\right) \quad .\end{aligned}\tag{1.13}$$

### OPGAVE 1.8

Bestem alle de indre vinkler i hver af følgende trekanter. Vinklerne skal angives i radianer, altså: 1 radian svarer til  $180/\pi$  grader og 1 grad svarer til  $\pi/180$  radianer. Alle tallene kan gerne angives med blot et par decimaler. Check, at vinkelsummen i hver trekant er  $\pi$  radianer.

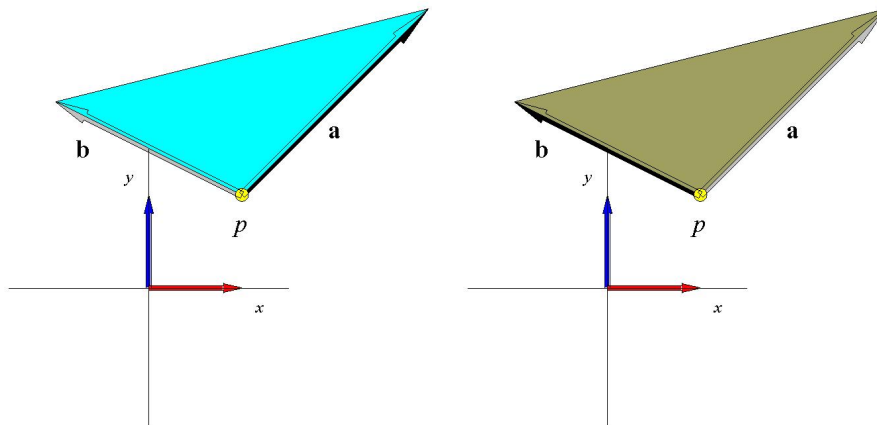
$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta((1,1), (4,-2), (8,4)) \\ \Delta_2 &= \Delta((1,3), (4,-2), (-8,4)) \\ \Delta_4 &= \Delta(O, \mathbf{j}, \mathbf{i}) \quad .\end{aligned}\tag{1.14}$$

### 1.2.3 Orientering af en plan trekant

Som sikkert bemærket ovenfor ved brug af (1.9) gjorde vi der et stort nummer ud af at tage den numeriske værdi alle steder (for eksempel af determinanten) for at sikre, at arealerne af trekantene bliver positive. Ved ombytning af *rækkefølgen* af vektorerne i trekanten  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  skifter determinanten fortegn (hvorfor det?). Rækkefølgen har med **orienteringen** af trekanten at gøre:

||| **Definition 1.9** Lad  $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  betegne en regulær trekant i planen. Hvis drejningen om fodpunktet  $p$  af  $\mathbf{a}$  imod  $\mathbf{b}$  er *imod* uret, så siger vi, at trekanten  $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  er en **positivt orienteret trekant**; ellers (altså hvis drejningen af  $\mathbf{a}$  imod  $\mathbf{b}$  er *med* uret) siger vi, at trekanten er en **negativt orienteret trekant**.

Med andre ord, hvis  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  er positivt orienteret, så er  $\triangle(p, \mathbf{b}, \mathbf{a})$  negativt orienteret. Se figur 1.9 hvor vi med to forskellige farver (cyan og khaki) har angivet de to forskellige orienteringer af en trekant. Hvis den ene kant-vektor i  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  drejes dynamisk omkring  $p$  som i figur 1.10 så vil orienteringen af trekanten skifte præcis i de situationer hvor trekanten ikke er regulær.



Figur 1.9: Trekanten  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \triangle((1, 1), (2, 2), (-2, 1))$  fra figur 1.8 har positiv orientering; den tilsvarende (med samme fodpunkt) negativt orienterede version  $\triangle(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \triangle((1, 1), (-2, 1), (2, 2))$  er vist til højre.

Bemærk, at arealet af en regulær trekant altid er positiv – uafhængig af orienteringen.

### OPGAVE 1.10

Bestem areal, orientering, indre vinkler, kantlængder, og omkreds for hver af følgende plane trekanter.

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\
 \Delta_2 &= \Delta((1, 1), (3, 0), (0, 4)) \\
 \Delta_3 &= \Delta((12, 117), (3, 0), (0, 4)) \\
 \Delta_4 &= \Delta(O, (1, 0), (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))) \\
 \Delta_5 &= \Delta(O, \mathbf{j}, (3, 4)) \quad .
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

## 1.3 Areal versus omkreds

Nogle plane trekanter er federe end andre, dvs. de har relativt stort areal i forhold til deres omkreds. Vi vil begynde at undersøge det fænomen med et par eksempler:

### Eksempel 1.11

En familie af trekanter er defineret ved, at det ene hjørne bevæger sig på en cirkel med radius 1 og centrum i  $(1, 0)$  som vist i figur 1.10. De to andre hjørner er fastholdte og ligger konstant i punkterne  $(0, 0)$  og  $(2, 0)$  henholdsvis. Vi vil bestemme de største trekanter i familien, altså dem der har det største areal  $A$ . Af symmetri Grunde må der være mindst to. Hvorfor det?

Vi kan først bemærke, at cirklen kan *parametriseres* ved hjælp af cosinus og sinus: Vektoren  $\mathbf{q}$  fra punktet  $(1, 0)$  til et vilkårligt givet punkt på cirklen danner en vinkel  $\theta$  med  $x$ -aksen, dvs.  $\angle(\mathbf{i}, \mathbf{q}) = \theta$ . Men så kan  $\mathbf{q}$  skrives som

$$\mathbf{q} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad , \tag{1.16}$$

og dermed er stedvektoren fra  $(0, 0)$  til det givne punkt på cirklen:

$$\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{q} = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta)) \quad . \tag{1.17}$$

Den faste kant-vektor for trekanten er givet ved

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} = (2, 0) \quad , \tag{1.18}$$

så vi kan konkludere, at trekantens areal er givet ved

$$\text{Areal}(\theta) = \frac{1}{2} |\det([\mathbf{a}^* \ \mathbf{b}^*])| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 + \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} \right| \quad , \tag{1.19}$$

hvor vi tillader  $\theta$  at antage alle vinkel-værdierne,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Men den determinant er let at udregne:

$$\text{Areal}(\theta) = |\sin(\theta)|. \tag{1.20}$$

Det vil sige, at det største areal opnås, når  $|\sin(\theta)|$  er størst, og det opnås for  $\theta = \pi/2$  og for  $\theta = 3\pi/2$ , fordi der og kun der er  $|\sin(\theta)|$  præcis 1.

Figur 1.10: Hvilken trekant har størst areal i forhold til sin omkreds? Det oplyses og ses, at det bevægede hjørne bevæger sig langs en cirkel, se eksempel 1.11. Animeret: Klik på figuren.

De største trekanter i familien får vi nu ved at indsætte de to fundne  $\theta$ -værdier i udtrykket (1.17) for  $\mathbf{b}$  ovenfor: Den ene trekant er udspændt fra origo  $(0,0)$  af  $\mathbf{a} = (2,0)$  og  $\mathbf{b} = (1,1)$  og den anden trekant er udspændt af  $\mathbf{a} = (2,0)$  og  $\mathbf{b} = (1,-1)$ . De har begge arealet  $A(\pi/2) = A(3\pi/2) = 1$ .

### ||| OPGAVE 1.12

En ellipse i planen har ligningen

$$E : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad , \quad (1.21)$$

hvor  $a$  og  $b$  er positive tal, de såkaldte halvaksler. En sådan ellipse er symmetrisk omkring akserne og har centrum i Origo,  $(0,0)$ .

1. Angiv koordinaterne for de to punkter, hvor ellipsen skærer  $x$ -aksen.
2. Hvor skærer den  $y$ -aksen?
3. Hvad er arealet af det område i planen som afgrænses af ellipsen  $E$ ?



Figur 1.11: Hvilken trekant har størst areal i forhold til omkreds? Det oplyses, at det bevægede hjørne bevæger sig langs en ellipse med halvakserne 1 og  $\sqrt{3}$ . Opgaven er formuleret mere præcist i opgave 1.13. Figuren er animeret.

### OPGAVE 1.13

En familie af trekanter er defineret som i figur 1.11. Opstillingen er magen til den i figur 1.10 bortset fra, at ”styrekurven” for  $\mathbf{q}$  nu er en ellipse med centrum i  $(1, 0)$  og halvakserne er 1 (i  $x$ -akseretningen) og  $\sqrt{3}$  (i  $y$ -akseretningen). Ellipsens ligning er:

$$E : \left(\frac{x-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \quad (1.22)$$

1. Begrund, at med den metode, som er gennemgået i eksempel 1.11, kan følgende udtryk nu benyttes for vektoren  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = (1 + \cos(\theta), \sqrt{3} \sin(\theta)) , \quad (1.23)$$

dvs. begrund, at alle de punkter, der har sådan en stedvektor, ligger på ellipsen med den givne ligning og vis, at alle punkter på hele ellipsen ’rammes’ når  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

2. Find de trekanter i familien, som har det største areal  $A$ . Angiv også det areal.
3. Find de trekanter i familien, som har den største *omkreds*  $L$ . Angiv også den omkreds.
4. Find de trekanter i familien, som har det største *forhold*  $A/L$  imellem areal  $A$  og omkreds  $L$ . Angiv også det forhold.

#### 1.3.1 Heron’s formel

En af de mest forbavsende sætninger om trekanter er følgende, som er opkaldt efter **Heron**, der var ingeniør og matematiker i Alexandria; se [Wikipedia: Heron](#):

||| **Sætning 1.14** Lad  $\triangle$  betegne en trekant med kant-længderne  $a$ ,  $b$ , og  $c$ . Sæt nu  $s$  til at være den *halve* omkreds af trekanten, altså

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) \quad . \quad (1.24)$$

Så er arealet af trekanten givet ved den simple formel:

$$\text{Areal}(\triangle) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \quad . \quad (1.25)$$

*Bevis.* Se evt. [Wikipedia: Heron's formula](#) eller [VLH]. □

### ||| OPGAVE 1.15

Lad  $\triangle$  have kantlængderne 3, 5, og 6.

1. Brug Heron's formel til bestemmelse af arealet af trekanten.
2. Hvis du ikke kendte Heron's formel, hvordan ville du så finde arealet?
3. Antag, at trekanten er placeret i det sædvanlige koordinatsystem i planen sådan at  $\triangle = \triangle(O, (0, 3), (\star_1, \star_2))$ . Bestem alle mulighederne for udfyldning af de manglende koordinater  $(\star_1, \star_2)$  ud fra de givne oplysninger, og angiv for hver løsning, om  $\triangle(O, (0, 3), (\star_1, \star_2))$  er positivt orienteret eller negativt orienteret.
4. Benyt een af fremstillingerne  $\triangle(O, (0, 3), (\star_1, \star_2))$  til at checke arealberegningen – ved hjælp af areal-ligningen (1.9).

### ||| OPGAVE 1.16

Blandt de *ligebenede* trekanter med omkreds  $L = 1$  er det præcis de *ligesidede* trekanter, der har *størst areal*  $A$ . Bevis den påstand og angiv værdien af det største areal.

### ||| OPGAVE 1.17

|| Vis, at en trekant  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  er regulær hvis og kun hvis  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  er lineært uafhængige.

### ||| OPGAVE 1.18

|| I Heron's formel, ligning (1.25), forudsættes det ikke, at trekanten er regulær. Af formelen fås direkte at trekanten er regulær hvis blot  $s > \max\{a, b, c\}$ . Vis, at der for alle trekanter gælder, at  $s \geq \max\{a, b, c\}$ .

## ||| Kapitel 2

# 2D Matrix-operationer

I dette kapitel vil vi **deformere plane trekanter** ved hjælp af  $2 \times 2$ -matricer.

## 2.1 Algebraisk opsætning

Vi antager, at vi har givet en eller anden vilkårlig matrix, som vi herefter vil kalde en **deformationsmatrix**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} . \quad (2.1)$$

Dernæst tager vi en trekant, der er givet på hængsel-formen  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  som indført i kapitel 1.

Vi vil så deformere hængslet og dermed trekanten til et nyt hængsel, en ny trekant, med det samme hjørnepunkt  $p$ , men med nye udspændende kant-vektorer,  $\tilde{\mathbf{a}}$  og  $\tilde{\mathbf{b}}$ , men hvordan? Det vil vi nu beskrive:

Den nye trekant kan skrives som  $\triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ , hvor  $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$  og  $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$  konstrueres ved hjælp af  $\mathbf{K}$  og de givne kant-vektorer  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  og  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  på følgende måde:

De nye kant-vektorer til konstruktion af det deformerede hængsel defineres ved at gange matricen  $\mathbf{K}$  på hver af koordinatsøjlerne for de to kant-vektorer ud fra  $p$  i det gamle hængsel:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}a_1 + k_{12}a_2 \\ k_{21}a_1 + k_{22}a_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

og tilsvarende fås  $\tilde{\mathbf{b}}$  fra  $\mathbf{b}$ :

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}b_1 + k_{12}b_2 \\ k_{21}b_1 + k_{22}b_2 \end{bmatrix} . \quad (2.3)$$

De to definitionsligninger kan samles til en matrix-ligning:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

På kort form har vi altså, som en alternativ måde at skrive (2.2) og (2.3):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}^* &= \mathbf{K}\mathbf{a}^* \\ \tilde{\mathbf{b}}^* &= \mathbf{K}\mathbf{b}^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

eller på endnu kortere, kompakt matrix form for ligning (2.4):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

### Eksempel 2.1

For trekanten  $\triangle = \triangle(O, (2, 1), (1, 2))$  og deformationsmatricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

får vi

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

sådan at den deformerede trekant er givet ved:  $\tilde{\triangle} = \triangle(O, (8, 4), (7, 5))$ .

### OPGAVE 2.2

Lad  $\mathbf{K}$  betegne de nedenfor angivne deformationsmatricer og bestem i hvert tilfælde de trekanter der fremkommer ved deformationerne af de angivne trekanter:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \triangle_2 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \triangle_3 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \triangle_4 &= \triangle((2, 1), (1, 2), (2, 4)) \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \triangle_5 &= \triangle((2, 1), (1, 2), (2, -4)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

### OPGAVE 2.3

Find i hver enkelt tilfælde nedenfor den deformationsmatrix  $\mathbf{K}_i$ , som deformerer den givne trekant  $\Delta_i$  over i den givne trekant  $\widetilde{\Delta}_i$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad , \quad \widetilde{\Delta}_1 = \Delta(O, (2, 1), (-1, 2)) \\ \Delta_2 &= \Delta(O, (2, 1), (-1, 2)) \quad , \quad \widetilde{\Delta}_2 = \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \Delta_3 &= \Delta(O, (2, 1), (-1, 2)) \quad , \quad \widetilde{\Delta}_3 = \Delta(O, (-1, 2), (2, 1))\end{aligned}\tag{2.10}$$

### OPGAVE 2.4

Find i hvert enkelt tilfælde den deformerede trekant  $\widetilde{\Delta}$  når den givne trekant  $\Delta$  deformeres først med  $\mathbf{K}_1$  og dernæst den nye trekant med  $\mathbf{K}_2$  osv.

$$\begin{aligned}\Delta_a &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_b &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \\ \Delta_c &= \Delta(O, (2, 1), (2, 2)) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_d &= \Delta(O, (2, 1), (2, 2)) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .\end{aligned}\tag{2.11}$$

## 2.2 Geometrisk tolkning

Hvad betyder ovenstående i geometrisk forstand? Hvordan ser disse deformationer faktisk ud? Og hvordan afhænger deformationerne af  $\mathbf{K}$  og af de kant-vektorer vi starter med?

Deformationsmatricen  $\mathbf{K}$  kan betragtes som en **maskine**, der drejer, trækker og strækker i et hængsel for en trekant og som giver et nyt hængsel og dermed en ny trekant.

Det første vi kan se umiddelbart er, at arealet af den nye trekant er givet ved arealet af den gamle trekant ganget med den numeriske værd af determinanten af deformationsmatricen:

### Sætning 2.5

$$\text{Areal}(\Delta(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})) = |\det(\mathbf{K})| \cdot \text{Areal}(\Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad .\tag{2.12}$$

Specielt fås, at den deformerede trekant er regulær hvis og kun hvis den gamle er regulær (dvs. har areal  $> 0$ ) og deformationsmatricen  $\mathbf{K}$  også er regulær (altså  $\det(\mathbf{K}) \neq 0$ ).

*Bevis.* Aflæses direkte af ligning (2.6) sammenholdt med arealformlen (1.9).  $\square$

### Eksempel 2.6

I fortsættelse af eksempel 2.1: Den gamle trekant  $\triangle$  har arealet 3, og da determinanten af  $\mathbf{K}$  er 4, så har den nye trekant arealet 12 i henhold til sætning 2.5. Og det stemmer med en direkte udregning af arealet af den nye trekant.

## 2.2.1 Hele trekanten deformeres

Vi har indirekte antaget, at det er tilstrækkeligt at definere hvordan en trekants hængsel - dvs. de to kant-vektorer ud fra det fælles hjørnepunkt  $p$  - deformeres. Men kan vi være sikre på, at hele trekanten selv 'følger med' ved deformationen?

Vi vil kort indse, at det faktisk *er* tilfældet, som forventet, altså at der gælder følgende:

**Sætning 2.7** Hvis  $\mathbf{w}$  er en vektor med fodpunkt  $p$  og spidspunkt inde i den trekant, der er repræsenteret ved hængslet  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , så er  $\tilde{\mathbf{w}}$  også en vektor, der har fodpunkt  $p$  og spidspunkt inde i den deformerede trekant  $\triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ , når  $\tilde{\mathbf{w}}$  defineres (på samme måde og med samme opskrift som  $\tilde{\mathbf{a}}$  og  $\tilde{\mathbf{b}}$ ) ved

$$\tilde{\mathbf{w}}^* = \mathbf{K}\mathbf{w}^* \quad . \quad (2.13)$$

*Bevis.* Deformation med en matrix er en **lineær afbildning**. Hvis  $\mathbf{w}$  som angivet har spidspunkt inde i den regulære trekant  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , så kan  $\mathbf{w}$  skrives som en (og kun en) **linear-kombination** af de to **lineært uafhængige** vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ : Der findes to entydigt givne værdier  $\alpha \geq 0$  og  $\beta \geq 0$  med  $\alpha + \beta \leq 1$  sådan at

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \quad . \quad (2.14)$$

Overvej ulighederne  $\alpha \geq 0$  og  $\beta \geq 0$  med  $\alpha + \beta \leq 1$ ! Hvor kommer de fra? Og for hvilke  $\mathbf{w}$  er der lighedstegn [=] i de enkelte uligheder?

Derfor er også

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}^* &= \mathbf{K}\mathbf{w}^* = \mathbf{K}(\alpha\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{b}^*) \\ &= \mathbf{K}(\alpha\mathbf{a}^*) + \mathbf{K}(\beta\mathbf{b}^*) \\ &= \alpha\mathbf{K}\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{K}\mathbf{b}^* \\ &= \alpha\tilde{\mathbf{a}}^* + \beta\tilde{\mathbf{b}}^* \quad , \end{aligned} \quad (2.15)$$

sådan at  $\tilde{\mathbf{w}}$  er en tilsvarende (med de samme koefficienter  $\alpha \geq 0$  og  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta \leq 1$ ) linearkombination af det nye hængsels kant-vektorer  $\tilde{\mathbf{a}}$  og  $\tilde{\mathbf{b}}$ . Spidspunktet af vektoren  $\tilde{\mathbf{w}}$  med fodpunktet

$p$  ligger derfor inde i (eller på en af kanterne i) trekanten  $\triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ , og det var det, vi skulle vise.  $\square$

Det giver herefter mening at bruge en notation, der direkte fortæller, at trekanten  $\tilde{\triangle} = \triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$  fås ved for eksempel at bruge deformationsmatricen  $\mathbf{K}$  på trekanten  $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , idet begge trekanter repræsenteres ved de respektive hængsler. Vi vil benytte følgende notation:

$$\tilde{\triangle} = \triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{K} \cdot \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad . \quad (2.16)$$

## 2.2.2 Rotationer

Rotationsmatricer er specielle typer af deformationsmatricer. Alle 2D rotationsmatricer har følgende struktur - de er givet ved en rotations-vinkel  $\varphi \in \mathbb{R}$  således:

$$\mathbf{U}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad . \quad (2.17)$$

Når vi betragter  $\mathbf{U}(\varphi)$  som en deformationsmatrix, der 'ganges på' et hængsel  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , så består 'deformationen' i at hængslet roteres vinklen  $\varphi$  omkring fodpunktet  $p$ . Det kan vi se på følgende måde:

For enhver givet enhedsvektor  $\mathbf{e}$  på formen  $\mathbf{e} = (\cos(\nu), \sin(\nu))$  får vi billedvektoren  $\tilde{\mathbf{e}}$  ved at deformere med  $\mathbf{U}(\varphi)$  således:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{e}^* &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\nu) \\ \sin(\nu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\nu) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\nu) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\nu) \cdot \sin(\varphi) + \sin(\nu) \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\nu + \varphi) \\ \sin(\nu + \varphi) \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

hvor vi ved det sidste lighedstegn har benyttet **additionsformlerne for cosinus og sinus**. Det ses altså at  $\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{e}^*$  er koordinatsøjlematrix for præcis den vektor  $\tilde{\mathbf{e}} = (\cos(\nu + \varphi), \sin(\nu + \varphi))$  der fremkommer ved at rotere vektoren  $\mathbf{e} = (\cos(\nu), \sin(\nu))$  vinklen  $\varphi$  i positiv omløbsretning.

I figur 2.1 vises en (animeret) rotation af et hængsel  $\triangle(O, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  med rotationsvinkel  $\varphi$  der gennemløber intervallet  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ; det svarer til at rotere en hel omgang rundt om Origo  $O$  i positiv omløbsretning.

Figur 2.1: Rotation af hængsel. Animeret.

### 2.2.3 Skaleringer i koordinatakserektionerne

Skaleringsmatricerne for skalering i henholdsvis  $x$ -akse-retning og i  $y$ -akse-retning er, med de respektive skaleringskonstanter  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$ :

$$\mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.19)$$

og

$$\mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} . \quad (2.20)$$

Bemærk, at vi kan udføre begge skaleringer på een gang ved:

$$\mathbf{S}_{xy}(\sigma_1, \sigma_2) = \mathbf{S}_x(\sigma_1) \cdot \mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} . \quad (2.21)$$

Se animationerne af de to typer skaleringer i figurerne 2.2 og 2.3.

#### ||| OPGAVE 2.8

|| Vis, at  $\mathbf{S}_x(\sigma_1) \cdot \mathbf{S}_y(\sigma_2) = \mathbf{S}_y(\sigma_2) \cdot \mathbf{S}_x(\sigma_1)$ .

### 2.2.4 Flip

Flipmatricen  $\mathbf{F}$  er betegnelsen for følgende specielle deformationsmatrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (2.22)$$



Figur 2.2: Skalering af hængsel i  $x$ -akse-retning med faktorer  $\sigma_1$  der gennemløber  $\sigma_1 \in [1, 3]$ . Animeret.

Figur 2.3: Skalering af hængsel i  $y$ -akse-retning med faktorer  $\sigma_2$  der gennemløber  $\sigma_2 \in [-1, 1]$ . Animeret.



Bemærk, at

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{E} \quad \text{sådan at} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.23)$$

men  $\mathbf{F}$  er ikke en rotationsmatrix da  $\det(\mathbf{F}) = -1$ .

### ||| OPGAVE 2.9

|| Hvorfor kan vi tillade os at kalde denne matrix  $\mathbf{F}$  en **flipmatrix** når vi betragter den som en deformationsmatrix, der 'ganges på' hængsler og trekanter?

## 2.3 Hovedsætning for 2D (deformations-)matricer

Der gælder et fantastisk resultat om alle matricer, som vi foreløbig vil nøjes med at formulere her for regulære  $2 \times 2$ -matricer - for at få en første fornemmelse af, hvad det hele går ud på:

||| **Sætning 2.10** Enhver regulær (deformations-)matrix  $\mathbf{K}$  kan skrives som et produkt af 4 regulære matricer således:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \quad (2.24)$$

hvor  $\mathbf{U}$  og  $\mathbf{V}$  er rotationsmatricer,  $\boldsymbol{\Sigma}$  er en entydig bestemt diagonalmatrix med positive diagonalelementer, og  $\widehat{\mathbf{F}}$  er enten flip-matricen (hvis  $\det(\mathbf{K}) < 0$ ) eller enhedsmatricen (hvis  $\det(\mathbf{K}) > 0$ ):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_U) & -\sin(\varphi_U) \\ \sin(\varphi_U) & \cos(\varphi_U) \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \varphi_U \in [-\pi, \pi] \quad , \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \quad , \quad (2.26)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_V) & -\sin(\varphi_V) \\ \sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \varphi_V \in [-\pi, \pi] \quad , \quad (2.27)$$

sådan at den transponerede rotationsmatrix ser således ud

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_V) & \sin(\varphi_V) \\ -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{bmatrix} \quad , \quad (2.28)$$

$$\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{hvis } \det(\mathbf{K}) < 0 \quad , \quad (2.29)$$

og

$$\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvis } \det(\mathbf{K}) > 0 \quad . \quad (2.30)$$

||| **Bemærkning 2.11** Der er et par observationer, som det er værd at lægge mærke til:

1. Den transponerede rotationsmatrix  $\mathbf{V}^*$ , som skal bruges i produktet (2.24), er selv en rotationsmatrix – den roterer samme vinkel som  $\mathbf{V}$ , bare i modsat retning. De to matricer er hinandens inverse:  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* = \mathbf{E}$  sådan at  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$ .
2. Hvis  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  og  $\det(\mathbf{K}) > 0$ , så er  $\mathbf{K}$  selv en rotationsmatrix.
3. Hvis  $\det(\mathbf{K}) < 0$  så er  $\det(\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}}) > 0$  fordi  $\det(\widehat{\mathbf{F}})$  jo i så fald er negativ. Men det betyder ifølge sætningen (for dekomponering af matricer med positiv determinant), at  $\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}}$  kan skrives som et produkt således:

$$\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad (2.31)$$

sådan at

$$\mathbf{K} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \quad (2.32)$$

Men  $\widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$ , så vi får dermed direkte:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \quad (2.33)$$

og det er så netop sætningen for dekomponering af matricer med negativ determinant! Dvs. ved på denne måde at gange  $\widehat{\mathbf{F}}$  på  $\mathbf{K}$  behøver vi kun at kunne dekomponere matricer med *positiv* determinant.

### ||| OPGAVE 2.12

|| Vis, at hvis  $\mathbf{V}$  er en rotationsmatrix med rotationsvinkel  $\varphi_V$ , så er  $\mathbf{V}^*$  også en rotationsmatrix, som defineret i (2.20), og rotationsvinklen for  $\mathbf{V}^*$  er  $-\varphi_V$ . Vis, at det heraf følger, at  $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$ .

## 2.4 Hvordan dekomponeres en matrix?

Der er to oplagte spørgsmål: Hvordan viser man sådan en sætning og hvordan bruger man den? Det sidste spørgsmål (som vi indtil videre vil nøjes med at besvare, men som næsten også er et argument for sætningen) handler om at kunne finde faktorerne, ingredienserne,  $\widehat{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{V}^*$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$ , og  $\mathbf{U}$  i ovenstående ligning (2.24), når matricen  $\mathbf{K}$  er givet.

Det er ikke vanskeligt; metoden hedder **Singular Value Decomposition** eller kort **SVD**, og benyttes i utallige anvendelser, se f.eks. [S, ND].

||| **Metode 2.13** Vi skitserer nu først SVD metoden i punktform, og henviser iøvrigt til eksempel 2.14 nedenfor, hvor alle punkterne gennemgås i detalje for en konkret matrix  $\mathbf{K}$ .

Først bestemmes  $\widehat{\mathbf{F}}$ . Den fås direkte ved blot at finde ud af, om  $\det(\mathbf{K})$  er positiv eller negativ og så bruge (2.30) henholdsvis (2.29).

1. Hvis  $\det(\mathbf{K}) > 0$  sådan at  $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$  så er proceduren følgende:

- $\boldsymbol{\Sigma}$  fås ud fra egenverdierne for den symmetriske matrix  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ . (Hvorfor er det produkt en symmetrisk matrix? Dvs. Hvorfor er  $(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K})^* = \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ ?) De egenverdier er altid positive (hvorfor det?) - lad os kalde dem  $\sigma_1^2$  og  $\sigma_2^2$  og lad os nummerere dem i størrelse, sådan at  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ . De respektive kvadratrødder af disse egenverdier for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  er så  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .
- Søjlerne i  $\mathbf{V}$  er ortogonale enheds-egenvektorer  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$  svarende til egenverdierne  $\sigma_1^2$  og  $\sigma_2^2$  for den symmetriske matrix  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ . Egenvektorerne skal vælges sådan at  $\mathbf{V}$  har positiv determinant (det er altid muligt, eventuelt ved at skifte fortegn på én af egenvektorerne):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* & \mathbf{v}_2^* \end{bmatrix} \quad . \quad (2.34)$$

Matricen  $\mathbf{V}^*$ , som jo er den, vi har brug for i dekomponeringen fås selvfølgelig dernæst ved at transponere den fundne  $\mathbf{V}$ .

(c) Søjlerne i  $\mathbf{U}$  er de koordinat-søjlevektorer  $\mathbf{u}_1^*$  og  $\mathbf{u}_2^*$ , som fås direkte ved at udregne

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{K} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{K} \mathbf{v}_2^*\end{aligned}\quad (2.35)$$

og indsætte dem som søjler i  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix} . \quad (2.36)$$

2. Hvis  $\det(\mathbf{K}) < 0$  sådan at  $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$ , så er proceduren følgende (se sidste punkt i bemærkning 2.11):

(a) Sæt  $\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$ . Så er  $\det(\widetilde{\mathbf{K}}) > 0$  og vi kan dekomponere  $\widetilde{\mathbf{K}}$  ved at indsætte  $\widetilde{\mathbf{K}}$  på  $\mathbf{K}$ 's plads i de tre punkter (a), (b), og (c) ovenfor i 1. procedure for matricer med positiv determinant. Lad os notere resultatet, den resulterende dekomponering, på følgende måde:

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^* \quad (2.37)$$

(b) Så kan  $\mathbf{K}$  selv direkte skrives på dekomponeret form således:

$$\mathbf{K} = \widetilde{\mathbf{U}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \widetilde{\mathbf{V}}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} . \quad (2.38)$$

Der foregår rigtig mange ting i den metode og strategi, men hvert step er rimelig simpelt. Vi illustrerer med et konkret eksempel:

### Eksempel 2.14

Vi har givet matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (2.39)$$

Vi vil finde dekompositionen af  $\mathbf{K}$  som et produkt af 4 matricer som i (2.24).

Determinanten af  $\mathbf{K}$  er positiv, så  $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$ , enhedsmatricen. Desuden er

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} , \quad (2.40)$$

som har egenværdierne  $\sigma_1^2 = 8$  og  $\sigma_2^2 = 2$ . Lad os lige repetere: Egenværdierne for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  findes ved at trække  $\lambda$  fra i diagonalen og finde rødderne i det tilhørende karakteristiske polynomium:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} , \quad (2.41)$$

som har determinanten

$$\det(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} - \lambda \mathbf{E}) = (5 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 8) \quad . \quad (2.42)$$

Dette polynomium er pr. definition det **karakteristiske polynomium** for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ , og rødderne er netop:  $\lambda_1 = 8$  og  $\lambda_2 = 2$ , sådan at  $\sigma_1^2 = 8$  og  $\sigma_2^2 = 2$  og derfor  $\sigma_1 = \sqrt{8}$ ,  $\sigma_2 = \sqrt{2}$ , således at:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.43)$$

Lad os repetere hvordan vi dernæst finder egenvektorerne hørende til egenværdien  $\lambda_1 = \sigma_1^2$ : Først trækkes  $\lambda_1$  fra i diagonalen i  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 5 - \lambda_1 & 3 \\ 3 & 5 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 8 & 3 \\ 3 & 5 - 8 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.44)$$

og da vi ved, at determinanten er 0, så findes der uendelig mange løsninger til det homogene lineære ligningssystem, der har  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{E}$  som koefficientmatrix:

$$\begin{aligned} (-3)x + 3y &= 0 \\ 3x + (-3)y &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ved at løse dette system finder vi let, at *en* løsning er  $(1, 1)$  som normeres ved at dividere med længden til  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ; denne sidstnævnte vektor er også en løsning til ligningssystemet.

NB: Vektoren  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  er tilsvarende en enhedsvektor-løsning til det samme ligningssystem, men her *vælger* vi den først fundne og arrangerer dernæst nedenfor fortegnet på egenvektoren  $\mathbf{v}_2$  hørende til  $\lambda_2 = 2$  således at den resulterende matrix  $\mathbf{V}$  får den korrekte determinant 1.

Helt tilsvarende opstilles ligningssystemet for egenvektorerne hørende til egenværdien  $\lambda_2 = 2$  og vi finder en enhedsvektor-løsning  $\mathbf{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  som normeret egenvektor hørende til egenværdien  $\lambda_2 = 2$ .

De ortogonale enheds-egenvektorer for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  som vi herefter vil bruge er altså:  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  og  $\mathbf{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

Summa summarum har vi derfor:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad , \quad (2.46)$$

og ved at bemærke, at  $1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4)$  får vi følgende rotationsmatrix:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \quad . \quad (2.47)$$

og hermed den *transponerede* matrix  $\mathbf{V}^*$ :

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} . \quad (2.48)$$

Søjlerne i  $\mathbf{U}$  er til sidst – i henhold til forskriften ovenfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \end{aligned} \quad (2.49)$$

som betyder, at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (2.50)$$

som igen klart er en rotationsmatrix, nemlig med  $\varphi_U = 0$ .

Vi kan for en ordens skyld lige checke, at den faktorisering, vi har fundet, faktisk virker og er korrekt – simpelthen ved at regne efter:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} . \end{aligned} \quad (2.51)$$

## OPGAVE 2.15

Dekomponér følgende matricer på samme måde som i eksempel 2.14 og husk at prøve efter til sidst, om produktet af de 4 matricer giver den ønskede  $\mathbf{K}$ -matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1/100 & 2/100 \\ 3/100 & 1/100 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_7 &= \begin{bmatrix} 100 & 2 \\ 3 & 1/100 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.52)$$

## 2.5 Deformations-energi

Vi forestiller os en **fabrik**  $M_P$ , der omdanner basis-trekanter  $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  til deformerede trekanter efter vilkårlige ønskede deformations-matricer  $\mathbf{K}$ . Basistrekantene haves på lager en masse og er gratis! Men hvad koster deformationerne? Fabrikken har maskiner, der kan rotere, skalere i akseretningerne, og vende trekanterne (med  $\mathbf{F}$ ) med fastholdt basispunkt  $O$ .

Det er kun skaleringerne der ikke er gratis på den fabrik:

|||| **Definition 2.16** Prisen på hver enkelt deformeret trekant (dvs. et mål for den **energi** det koster at deformere et standard hængsel med deformationsmatricen  $\mathbf{K}$ ) er på fabrikken  $M_P$  bestemt ved  $\sigma$ -værdierne for  $\mathbf{K}$ , altså  $\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{K})$  og  $\sigma_2 = \sigma_2(\mathbf{K})$  således:

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1(\mathbf{K}))^2 + (1 - \sigma_2(\mathbf{K}))^2 \quad . \quad (2.53)$$

|||| **Bemærkning 2.17** Husk, at egenverdierne for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  er  $\sigma_i^2(\mathbf{K})$ , så for at finde  $\sigma_i(\mathbf{K})$  er det nødvendigt at tage kvadratroden af disse egenverdier. Bemærk stadig, at  $\sigma_i(\mathbf{K})$  *sædvanligvis ikke* er egenverdier for  $\mathbf{K}$  selv!

### |||| OPGAVE 2.18

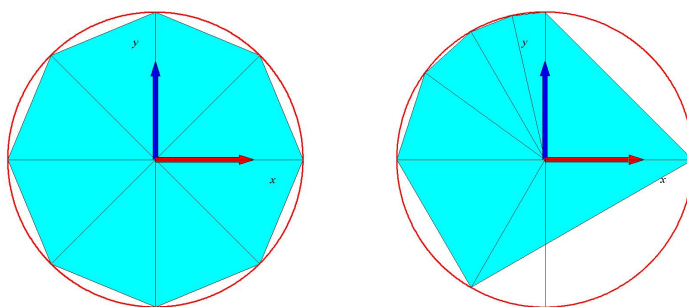
Hvad koster det fabrikken  $M_P$  at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven (med radius  $3/2$ ) til venstre i figur 2.4 når alle trekanterne antages konstrueret ved deformation af  $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  og placeret uden translation, dvs. med fastholdt fodpunkt  $O$ ?

### |||| OPGAVE 2.19

Hvad koster det fabrikken at producere trekanterne til fliselægningen vist til højre i figur 2.4? Det oplyses, at delepunkterne på den omskrevne cirkel er givet ved

$$q_i = \left( \frac{3}{2} \cos(\theta_i), \frac{3}{2} \sin(\theta_i) \right) \quad \text{hvor} \quad \theta_i \in \{0, 4\pi/3, \pi, 4\pi/5, 2\pi/3, 4\pi/7, \pi/2\} \quad , \quad (2.54)$$

og alle trekanterne antages igen at være konstrueret ved deformation af  $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$  og placeret uden translation, dvs. med fastholdt fodpunkt  $O$



Figur 2.4: Trianguleringer af (dele af) en cirkelskive med ligebenede trekanter.

### OPGAVE 2.20

Antag, at vi har en stak ens trekanter, som ikke er basis-trekanter, men givet ved  $\Delta = \Delta(O, (1, 1), (2, 1))$  og ønsker dem lavet om til nye trekanter  $\Delta = \Delta(O, (1, -1), (2, 1))$ . Hvordan kan vi benytte fabrikkens maskiner til det, og hvad er prisen for hver trekant?

En anden, konkurrerende, fabrik  $M_Q$  prissætter deformationerne på en noget anden måde. Basis-trekanterne haves også her på lager en masse og er stadig gratis, men:

**Definition 2.21** Prisen på hver enkelt deformeret basis-trekant (givet ved deformationsmatricen  $\mathbf{K}$ ) fra fabrikken  $M_Q$  defineres også her ud fra  $\sigma$ -værdierne for  $\mathbf{K}$ , men nu efter følgende formel:

$$Q(\mathbf{K}) = \left( \frac{1}{\sigma_1(\mathbf{K})} - \sigma_1(\mathbf{K}) \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_2(\mathbf{K})} - \sigma_2(\mathbf{K}) \right)^2 . \quad (2.55)$$

### OPGAVE 2.22

Hvad koster det at få fabrikken  $M_Q$  til at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven til venstre i figur 2.4 (uden translation)?

### OPGAVE 2.23

Hvilken fabrik er i hvert enkelt tilfælde billigst ved produktionen af de trekanter, der fremkommer ved brug af de deformationsmatricer  $\mathbf{K}_i$ , der er angivet i opgave 2.15? Vink: Det er tilstrækkeligt at se på et par tilfælde og dernæst generalisere ud fra dem.



### OPGAVE 2.24

I denne opgave er det en del af øvelsen selv at definere *stort* og *småt*:

1. Hvis man skal have lavet 1000 forskellige meget *små* trekanter, hvilken fabrik er så billigst?
2. Hvis man skal have lavet 1000 forskellige meget *store* trekanter, hvilken fabrik er så billigst?

Fabrikken  $M_Q$  har specialiseret sig i at deformere gamle brugte trekanter om til standard-basistrekanter. Dvs. hvis man kommer med sin gamle deformerede trekant  $\Delta = \Delta(O, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ , så finder fabrikken først ud af, hvilken deformationsmatrix  $\mathbf{L}$ , der deformerer denne trekant  $\Delta$  tilbage til standardtrekanten  $\Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ , udfører deformationen, og tager til sidst prisen  $Q(\mathbf{L})$  for det.

### OPGAVE 2.25

Vis, at på fabrikken  $M_Q$  er prisen for deformationen  $\Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \mapsto \Delta(O, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  den samme som prisen for deformationen tilbage igen  $\Delta(O, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ . Hvis den anden fabrik  $M_P$  fandt på at tilbyde tilbage-transformationer på samme måde, men ved brug af prissætningen  $P(\mathbf{K})$ , ville der så også der være den samme symmetri i priserne? Giv eksempler!

### OPGAVE 2.26

Lad  $\mathcal{T}$  betegne mængden af regulære positivt orienterede trekanter i planen, og lad  $\Delta_1$  og  $\Delta_2$  betegne to vilkårlige trekanter i  $\mathcal{T}$ . Vis – i forlængelse af opgave 2.25 – at på fabrikken  $M_Q$  er prisen  $d(\Delta_1, \Delta_2)$  for deformationen  $\Delta_1 = \Delta(O, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \Delta_2 = \Delta(O, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$  den samme som prisen  $d(\Delta_2, \Delta_1)$  for deformationen tilbage igen  $\Delta_2 = \Delta(O, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) \mapsto \Delta_1 = \Delta(O, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Så har vi dermed defineret en positiv, symmetrisk funktion  $d$  på  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ . Vis, at hvis  $d(\Delta_1, \Delta_2) = 0$  så findes der en rotation om  $O$  som drejer  $\Delta_1$  over i  $\Delta_2$ . Vis også omvendt, at hvis der findes sådan en rotation, så er  $d(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ . Undersøg, om der gælder trekantsulighed:  $d(\Delta_1, \Delta_2) + d(\Delta_2, \Delta_3) \geq d(\Delta_1, \Delta_3)$  for alle  $\Delta_1, \Delta_2$ , og  $\Delta_3$  i  $\mathcal{T}$  således at  $d$  er en *metrik* på det betragtede rum af trekanter.

### OPGAVE 2.27

Hvad koster det fabrikken  $M_P$  at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven (med radius  $3/2$ ) til venstre i figur 2.4 når translation *er* tilladt? Kan det så gøres billigere (end hvis translation af tetraedrene *ikke* er tilladt som i opgave 2.18) og i så fald hvor meget billigere?

### OPGAVE 2.28

Lad  $\mathbf{K}$  være en regulær  $2 \times 2$ -matrix og sæt  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$ . Vis, at  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  har de samme egenværdier som  $\tilde{\mathbf{K}}^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}$ , således at de to matricer ligeledes har den samme  $\Sigma$ -matrix.



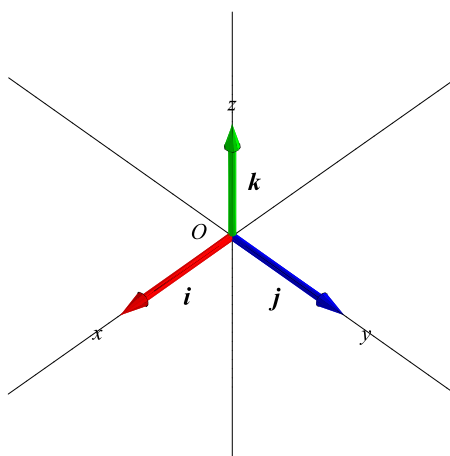
## ||| Kapitel 3

# Tetraedre

**Tetraedre** er fællesbetegnelsen for de objekter, der i 3D svarer til trekantene i 2D. Ligesom en trekant, der er udspændt af et hængsel, et to-ben, som er bestemt ved to vektorer med et fælles fodpunkt, så er et tetraeder udspændt af et tre-ben, altså tre vektorer **a**, **b**, og **c** med et fælles fodpunkt.

## 3.1 Det sædvanlige koordinatsystem i rummet

For effektivt at kunne beskrive hvad der foregår i rummet, og for præcist at kunne analysere treben og tetraedre etc. har vi brug for et 3D koordinatsystem. **Koordinatsystemet i rummet** er givet ved et fast valg af sædvanlige retvinklede koordinataksler ud fra et givet fast Origo, samt de tilhørende basisvektorer i akse-retningerne:  $\{O, x, y, z\}$ ,  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . Se figur 3.1.



Figur 3.1: Det sædvanlige koordinatsystem  $\{O, x, y, z\}$  i rummet med basisvektorer  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

Ligesom i planen kan vi nu præcisere beliggenhed af punkter og forbindelsesvektorer mellem punkter. Hvis punktet  $p$  har koordinaterne  $p = (p_1, p_2, p_3)$  og punktet  $q =$

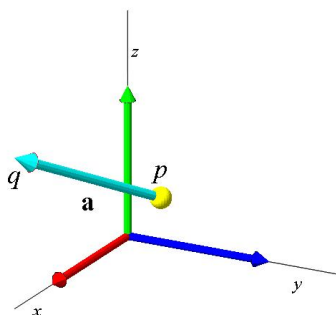
$(q_1, q_2, q_3)$ , så har vi dermed også koordinaterne for den vektor  $\mathbf{a}$ , der forbinder  $p$  med  $q$ :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \quad . \quad (3.1)$$

Vektoren  $\mathbf{a}$  kan betragtes som en pil (nu i rummet) med fodpunkt  $p$  og spidspunkt  $q$ , se figur 3.2.

I kapitel 4 vil vi se nærmere på  $3 \times 3$ -matrix-deformationer af tetraedre i rummet og har derfor ligesom i kapitel 2 (hvor vi studerede  $2 \times 2$ -matrix-deformationer af trekanter i planen) brug for at repræsentere vektorer ved deres koordinat-søjle-matricer:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{a}^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (3.2)$$



Figur 3.2: Vektoren  $\mathbf{a} = (1.0, -0.5, 0.5)$  med fodpunkt  $p = (0.5, 0.5, 0.5)$  og spidspunkt  $q = (1.5, 0.0, 1.0)$ .

### 3.1.1 Tetraedre

**Tetraedre** vil vi som allerede nævnt beskrive ved hjælp af **treben**. Et treben består af et punkt  $p$  og tre kantvektorer  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , og  $\mathbf{c}$  med det fælles fodpunkt  $p$ , se figur 3.4. Et sådant treben vil vi betegne på denne måde:

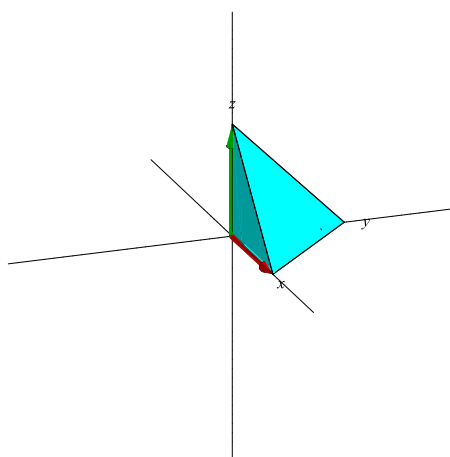
$$\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad . \quad (3.3)$$

Et specielt tetraeder er basis-tetraederet, se figur 3.3:

$$\boxtimes = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad . \quad (3.4)$$

For at være præcis (som for trekanter i planen): Ved et tetraeder vil vi forstå det rumlige område, der er afgrænset af de 4 trekanter, som er udspændt af det valgte trebens toppunkt og de 3 spidspunkter. Læg mærke til, at de tre spidspunkter selv udspænder den ene af de 4 trekanter. Se figurerne 3.4 og 3.3.

For et givet tetraeder er der altså 4 mulige valg af toppunkter til et udspændende treben og for hvert af de 4 valg af toppunkt er der dernæst 6 muligheder for at vælge rækkefølgen af de tre kantvektorer, der udgår fra det valgte toppunkt. Det vil sige, at et givet tetraeder kan skrives på formen (3.3) på ialt 24 måder.



Figur 3.3: Basistetraederet i rummet  $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

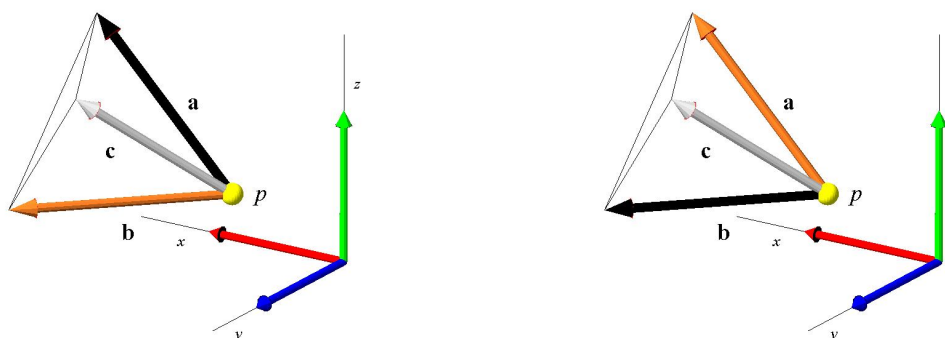
## 3.2 Arealet af trekanter i rummet

Vi er egentlig mest interesseret i at finde **rumfang** af tetraedre, se næste afsnit nedenfor. Tetraedre er **pyramider** og derfor er deres rumfang en tredjedel af **grundfladens areal** gange **højden** af pyramiden over den valgte grundflade. Se sætning 3.5, som vi vil bevise nedenfor.

For et helt generelt tetraeder  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  kan vi som grundflade vælge den trekant, der er udspændt af  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ , altså den trekant, der er givet ved hængslet  $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Læg mærke til, at det hængsel og den trekant er fuldstændig veldefineret - selvom der nu er tale om en **trekant i rummet** som ikke nødvendigvis ligger i  $(x, y)$ -planen.

For at bestemme det ovennævnte grundfladeareal for tetraederet får vi altså først brug for at bestemme arealet af den trekant der er udspændt af hængslet  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  i *rummet*.

Til den ende vil vi bruge **krydsproduktet** af de to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ :



Figur 3.4: To treben, begge med fodpunkt  $p = (0.5, 0.5, 0.5)$  og kantvektorerne  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ , og  $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$ . Trebenet til venstre er  $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  og det til højre er  $\boxtimes(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$ . Farvekoden følger rækkefølgen af de indgående kant-vektorer: Sort for førstnævnte, chokoladefarvet for nummer to, og grå for sidstnævnte kant-vektor.

**Definition 3.1** Krydsproduktet af  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  og  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  defineres som den vektor der har koordinaterne:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad (3.5)$$

Krydsproduktet mellem to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  kan udtrykkes som en *determinant* hvis vi udvider determinant-begrebet en anelse således, hvor den første række består af basisvektorerne  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , og  $\mathbf{k}$ :

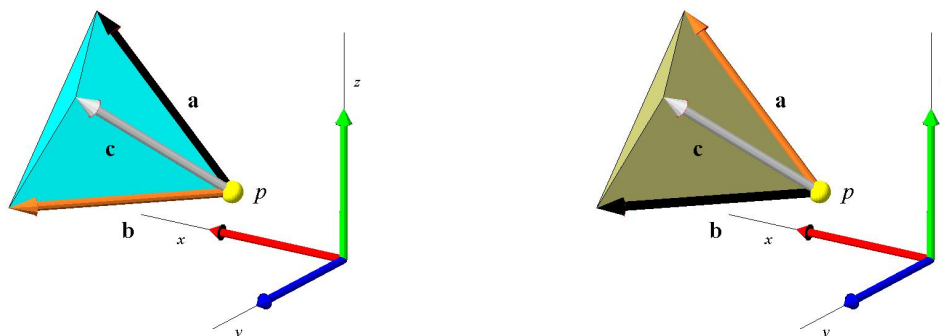
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \right) \quad (3.6)$$

Hvis vi nemlig *opløser den determinant* efter første række får vi:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \right) = \mathbf{i} \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j} \cdot (-(a_1b_3 - a_3b_1)) + \mathbf{k} \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) \quad (3.7)$$

og det er jo præcis den vektor der har koordinaterne som angivet i definition 3.1.

Vi har dermed vist, at vi kan bestemme krydsproduktet således:



Figur 3.5: Tetraederet  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  med  $p = (0.5, 0.5, 0.5)$ ,  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ , og  $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$  som i figur 3.4. Til venstre vises det tilsvarende negativt orienterede tetraeder  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$ . Den eneste forskel er farverne, som defineres i afsnit 3.4 nedenfor, og som er defineret ved den rækkefølge som kantvektorerne optræder med i det udpændende treben, jvf. Kapitel 1.



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} . \quad (3.8)$$

### OPGAVE 3.2

Vis direkte ud fra definitionen i ligning (3.5) eller ved brug af (3.8), at der for vilkårligt givne vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  gælder

1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  står vinkelret på  $\mathbf{a}$ , og  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  står vinkelret på  $\mathbf{b}$ ; altså:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{og} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0 . \quad (3.9)$$

2. Ved ombytning af faktorerne skifter krydsproduktet fortegn:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} . \quad (3.10)$$

3.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  hvis og kun hvis der enten gælder at mindst en af de to vektorer  $\mathbf{a}$  eller  $\mathbf{b}$  er  $\mathbf{0}$  eller at de to vektorer er proportionale. Det sker netop aldrig i en regulær trekant  $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Krydsproduktet giver arealet af en (rumlig) trekant således:

||| **Sætning 3.3** Arealet af en rumlig trekant  $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  er givet ved:

$$\text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \quad . \quad (3.11)$$

*Bevis.*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2(\theta) \\ &= (2 \text{Areal}(\triangle))^2 \quad , \end{aligned} \quad (3.12)$$

hvor vi igen har benyttet at trekantens areal er grundlinjen  $\|\mathbf{a}\|$  gange højden  $\|\mathbf{b}\| \sin(\theta)$  (hvor  $\theta$  er vinklen mellem de to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ ).

□

### ||| OPGAVE 3.4

Bestem arealet af hver af følgende trekanter i rummet:

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}) \\ \triangle_2 &= \triangle((1, 0, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)) \\ \triangle_3 &= \triangle((1, 2, 3), (4, 1, 2), (8, 2, -4)) \\ \triangle_4 &= \triangle(O, (4, 1, 2), (8, 2, 4)) \\ \triangle_5 &= \triangle((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)) \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

## 3.3 Rumfang af tetraedre

Som ovenfor nævnt er rumfanget af et tetraeder en tredjedel af grundfladens areal gange højden af tetraederet over den valgte grundflade.

Rumfanget af en hvilken som helst **pyramide** med grundflade  $G$  og højde  $h$  kan findes på den måde. En massiv pyramide består af en grundflade, et plant område  $G$ , samt af foreningsmængden af de rette linjestykker, der forbinder hver enkelt punkt i  $G$  med et givet toppunkt som ikke selv ligger i den plan der indeholder  $G$ , se figur 3.6.



||| **Sætning 3.5** Lad  $\mathcal{P}$  betegne en pyramide med et plant område  $G$  som grundflade og højden  $h$  over den grundflade. Så er rumfanget af  $\mathcal{P}$

$$\text{Vol}(\mathcal{P}) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \text{Areal}(G) \quad . \quad (3.14)$$

*Bevis.* Hver enkelt horisontalt tværsnit i pyramiden er en skaleret version af grundplanen, se figur 3.6. Skalerings-faktoren går fra 0 i toppen til 1 i grundplanen, og er iøvrigt en lineær funktion af højden over grundplanen. Skaleringsfunktionen er derfor som funktion af højden  $z$  over grundplanen:

$$k(z) = 1 - \frac{z}{h} \quad (3.15)$$

Arealet af det horisontale snit i højden  $z$  over grundplanen er derfor

$$S(z) = k^2(z) \cdot \text{Areal}(G) = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \cdot \text{Areal}(G) \quad . \quad (3.16)$$

Ifølge **snitmetoden** til bestemmelse af rumfang af rumlige områder har vi så:

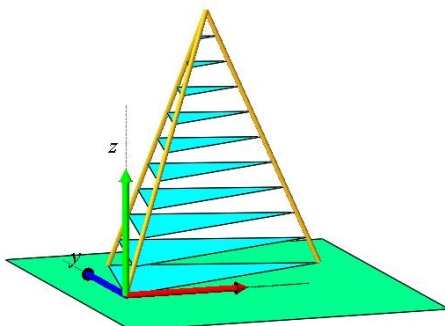
$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathcal{P}) &= \int_0^h S(z) dz \\ &= \text{Areal}(G) \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= \text{Areal}(G) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h (h-z)^2 dz \\ &= \text{Areal}(G) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot [-(h-z)^3]_0^h \\ &= \text{Areal}(G) \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3 \\ &= \text{Areal}(G) \cdot \frac{1}{3} \cdot h \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

□

Vi er nu klar til at beregne rumfang af vore specielle pyramider, de rumlige *tetraedre*.

Arealet af grundfladen,  $G = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  har vi bestemt i (3.11) for tetraederet  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . Højden  $h = h(\boxtimes, G)$  kan vi dernæst bestemme som skalarproduktet af den sidste kant-vektor  $\mathbf{c}$  med en enhedsvektor, som står vinkelret på grundtrekanten:

Men  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  står netop vinkelret på grundtrekanten (fordi krydsproduktet er vinkelret på grundtrekantens kant-vektorer), så den kan vi bruge:



Figur 3.6: En pyramide med antydede horisontale tværsnit.

$$h(\boxtimes, G) = \left| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \cdot \mathbf{c} \right| = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \quad (3.18)$$

således at

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \frac{1}{3} \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) \cdot h(\boxtimes, G) \\ &= \frac{1}{3} \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) \cdot \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \\ &= \frac{1}{6} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \end{aligned} \quad (3.19)$$

hvor vi har benyttet (3.11).

NB: Betegnelsen  $|r|$  benyttes for absolutværdien, den numeriske værdi, af det reelle tal  $r$ . Betegnelsen  $\|\mathbf{a}\|$  benyttes for længden af vektoren  $\mathbf{a}$ .

Dette udtryk for volumenet af et tetraeder giver anledning til at indføre følgende betegnelse:

||| **Definition 3.6** Rumproduktet  $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  af tre vektorer  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , og  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  defineres ved:

$$\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad . \quad (3.20)$$

Rumproduktet kan udtrykkes på determinant-form:

||| **Sætning 3.7**

$$\begin{aligned} \text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det([\mathbf{a}^* \mathbf{b}^* \mathbf{c}^*]) \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

*Bevis.* Det følger direkte af udregningen

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \quad , \quad (3.22)$$

og ved at bemærke, at determinanten af matricen i (3.21) giver præcis det samme udtryk når determinanten opløses efter sidste søjle.  $\square$

Ved at sammenholde dette med (3.19) har vi nu rumfanget af et tetraeder skrevet kort på 'determinant-form' og 'rumprodukt-form':

||| **Sætning 3.8** Rumfanget af tetraederet  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  kan beregnes således:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \frac{1}{6} |\det([\mathbf{a}^* \mathbf{b}^* \mathbf{c}^*])| \\ &= \frac{1}{6} |\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})| \quad . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Bemærk, at rumproduktet skifter fortegn ved ombytning af to af vektorerne. Derfor er der brug for absolut-værdi-tegnene i volumen-udtrykket i sætningen.

||| **Definition 3.9** Et **regulært tetraeder** er et tetraeder, der har et egentligt rumfang, altså et rumfang, der er skarpt større end 0.

Et tetraeder  $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  har rumfang 0, er kollapset, og dermed *singulær*, netop når determinanten i (3.23) er 0, og det forekommer præcis når een af vektorerne i trebenet kan skrives som en linearkombination af de to andre, f.eks.  $\mathbf{a} = 3 \cdot \mathbf{b} + 7 \cdot \mathbf{c}$ , sådan at  $\mathbf{a} - 3 \cdot \mathbf{b} - 7 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

### ||| OPGAVE 3.10

Vis den påstand ved hjælp af din viden om determinanter af matricer:  
Hvis der findes konstanter  $\alpha_1, \alpha_2$ , og  $\alpha_3$  således at

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \alpha_2 \cdot \mathbf{b} + \alpha_3 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad , \quad (3.24)$$

så er

$$\text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = 0 \quad . \quad (3.25)$$

Gælder det omvendte også? Dvs. hvis rumfanget af  $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  er 0, findes der så konstanter  $\alpha_1, \alpha_2$ , og  $\alpha_3$  sådan at ligningen (3.24) er opfyldt?

## 3.4 Orientering af tetraeder ved valg af treben

På samme måde som for trekanter i planen har vi nu mulighed for at definere **orienteringen af et tetraeder** i rummet:

||| **Definition 3.11** Et tetraeder, som er givet ved et treben  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  er *positivt orienteret* hvis rumproduktet  $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  i (3.21) er positivt; hvis rumproduktet  $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  er negativt, siges tetraederet at være *negativt orienteret*.



Læg mærke til, at rumproduktet er en determinant som netop skifter fortegn når to af søjlerne ombyttes, hvilket svarer til en ombytning i rækkefølgen af kant-vektorerne i  $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ .

I figurerne 3.5 og 3.3 er orienteringen af de givne tetraedre markeret ved farven på de afgrænsende trekanter: De 4 trekanter, som afgrænser tetraederet er alle cyan-farvede hvis tetraederet er positivt orienteret, og hvis tetraederet er negativt orienteret er de 4 afgrænsende trkanter alle khaki-farvede.

||| **Bemærkning 3.12** Standard-tetraederet  $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  er *positivt orienteret* fordi

$$\det([\mathbf{i}^* \ \mathbf{j}^* \ \mathbf{k}^*]) = 1 > 0 \quad . \quad (3.26)$$



Krydsproduktet af to lineært uafhængige vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  i rummet kan vi nu beskrive *geometrisk* på følgende måde:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  er den vektor i rummet, som står vinkelret på både  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ , har en længde som er det dobbelte af arealet af  $\triangle(O, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  og iøvrigt peger i den retning, der gør tetraederet  $\boxtimes(O, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  til et positivt orienteret tetraeder.

### ||| OPGAVE 3.13

Bestem rumfang, regularitet, og orientering for hver af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned} \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}) \boxtimes_2 &= \boxtimes((1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)) \\ \boxtimes_3 &= \boxtimes((1, 1, 4), (-1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)) \quad . \end{aligned} \quad (3.27)$$

## 3.5 Rumfang versus overfladeareal

Nogle tetraedre er *federe* end andre, sammenlign med afsnit 1.3 i kapitel 1 om trekkanterne i planen. Det skal igen her forstås sådan at nogle tetraedre har større rumfang i forhold til deres totale overfladeareal end andre.

Vi har ovenfor beregnet rumfanget af et vilkårligt tetraeder, og da overfladearealet simpelthen er summen af arealerne af de 4 trekkanter, der afgrænser tetraederet, kan vi nu beregne forskellige tilfælde.

### ||| OPGAVE 3.14

Bestem forholdet (Vol / Areal) mellem rumfang og *totale* overfladeareal for hvert af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned} \boxtimes_1 &= \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, 2\mathbf{k}) \\ \boxtimes_3 &= \boxtimes(O, 2\mathbf{i}, \mathbf{j}, 2\mathbf{k}) \\ \boxtimes_4 &= \boxtimes(O, 2\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, 2\mathbf{k}) \\ \boxtimes_5 &= \boxtimes(O, (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 0), (\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6), 0), (0, 0, 1)) \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

### OPGAVE 3.15

Bestem forholdet (Vol / Areal) mellem rumfang og *totale* overfladeareal for hvert af følgende tetraedre, hvor  $u$  er en positiv reel variabel, således at Vol / Areal derved bliver en funktion af  $u \geq 0$  :

$$\boxtimes_u = \boxtimes((0,0,0), \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}(u)) \quad , \quad (3.29)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{b} &= (\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{c}(u) &= \left(\frac{2}{3} \cdot \cos(\pi/6), 0, u\right) \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Bestem (om muligt) den værdi af  $u$  for hvilken Vol / Areal er størst mulig.

### OPGAVE 3.16

Vi ser på en familie af tetraedre, som er defineret ved hjælp af *to* parametre  $\alpha$  og  $u$  således:

$$\boxtimes_{\alpha,u} = \boxtimes((0,0,0), \mathbf{a}(\alpha), \mathbf{b}(\alpha), \mathbf{c}(\alpha,u)) \quad , \quad (3.31)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\alpha) &= (\alpha \cdot \cos(\pi/6), \alpha \cdot \sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{b}(\alpha) &= (\alpha \cdot \cos(\pi/6), -\alpha \cdot \sin(\pi/6), 0) \quad , \\ \mathbf{c}(\alpha,u) &= \left(\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot \cos(\pi/6), 0, u\right) \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Antag, at det totale overfladeareal af  $\boxtimes_{\alpha,u}$  er fast og er givet ved

$$\text{Areal}(\boxtimes_{\alpha,u}) = 1 \quad . \quad (3.33)$$

Bestem – under den betingelse – de to parameterværdier  $\alpha$  og  $u$  således at rumfanget af  $\boxtimes_{\alpha,u}$  er størst muligt.

### OPGAVE 3.17

Bestem mængden af alle de rumlige tetraedre, der har følgende egenskab: Der findes en vinkelret projektion af tetraederet på en given plan (vælg blot  $(x,y)$ -planen), således at tetraederets 6 kanter projiceres i en figur, der (pånær størrelse) ser præcis således ud:  $\boxtimes$ .

## ||| Kapitel 4

# 3D Matrix-operationer

Matrixdeformationer af tetraedre og af rumlige trekanter foregår på helt samme måde som i planen. Vi antager, at vi har givet en vilkårlig matrix  $\mathbf{K}$ , som nu er en  $3 \times 3$ -matrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} . \quad (4.1)$$

Denne matrix 'virker' på en rumlig vektor  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  og giver en billedvektor  $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$  på sædvanlig måde ved at danne matrixproduktet med  $\mathbf{a}$ -vektorens koordinatsøjlematrix  $\mathbf{a}^*$ :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} , \quad (4.2)$$

eller på kompakt form:

$$\tilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{K} \mathbf{a}^* . \quad (4.3)$$

Rumlige trekanter deformeres tilsvarende med  $\mathbf{K}$  ved at lade  $\mathbf{K}$  virke på begge kantvektorerne i et af de hængsler, der repræsenterer trekanten,  $\Delta = \Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_3 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} , \quad (4.4)$$

eller på kompakt form:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} . \quad (4.5)$$

Den deformerede trekant er altså givet ved hængslet  $\Delta(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ , og vi vil igen, når det ikke kan misforstås, skrive

$$\tilde{\Delta} = \Delta(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{K} \Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) . \quad (4.6)$$

Tetraedre deformeres selvsagt tilsvarende ved at lade  $\mathbf{K}$  virke på de tre kantvektorer i et repræsenterende treben  $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 \\ \tilde{a}_3 & \tilde{b}_3 & \tilde{c}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} . \quad (4.7)$$

På kompakt form:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* & \tilde{\mathbf{c}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{bmatrix} . \quad (4.8)$$

Det deformerede tetraeder er givet ved trebenet  $\boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})$ , og vi skriver

$$\tilde{\boxtimes} = \boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{K} \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) . \quad (4.9)$$



Figur 4.1: Tetraeder og et udspændende treben.

## 4.1 Geometrisk tolkning af 3D matrix-operationer

Et oplagt resultat, som vi direkte aflæser fra 4.8 eller 4.7 er, at rumfanget af et deformeret tetraeder er lig med den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der deformerer, ganget med rumfanget af det gamle tetraeder.

Det afgørende er, at rumfanget af et tetraeder jo essentielt netop er (pånær faktoren 1/6) determinanten af den matrix hvis søjler er de tre kantvektorens koordinatsøjlematricer.

### ||| Sætning 4.1

$$\text{Vol}(\boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})) = |\det(\mathbf{K})| \cdot \text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) . \quad (4.10)$$



Dette generaliserer altså direkte den tilsvarende sætning om arealet af plane trekanter, se sætning 2.5.

*Bevis.*

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})) &= \frac{1}{6} \cdot |\det \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* & \tilde{\mathbf{c}}^* \end{bmatrix} \right)| \\
 &= \frac{1}{6} \cdot |\det(\mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{bmatrix})| \\
 &= \frac{1}{6} \cdot |\det(\mathbf{K})| \cdot |\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{bmatrix} \right)| & (4.11) \\
 &= |\det(\mathbf{K})| \cdot \frac{1}{6} \cdot |\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{bmatrix} \right)| \\
 &= |\det(\mathbf{K})| \cdot \text{Vol}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) \quad .
 \end{aligned}$$

□

### 4.1.1 Hele tetraederet deformeres

Som vi allerede har noteret ovenfor med notationen ( $\tilde{\boxtimes} = \mathbf{K} \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ), så følger hele tetraederet med ved deformationen af det udspændende treben. Strengt taget bør vi overveje dette på samme måde som vi gjorde for plane trekanter, men argumentet er præcis det samme, og handler om at bruge lineariteten af den afbildning, der svarer til at lade  $\mathbf{K}$  virke på de vektorer, der har fodpunkt i  $p$  og spidspunkter inde i tetraederet.

#### ||| OPGAVE 4.2

|| Gennemfør det argument, der viser, at hvis  $\mathbf{K}$  afbilder kantvektorer i kantvektorer, så afbildes hele det rumlige udspændte tetraeder også på det rumlige udspændte tetraeder.

### 4.1.2 Skaleringer i akseretningerne

De egentligt deformerende matricer er klart dem, der strækker og trækker eller skubber og komprimerer tetraederne. Ligesom i kapitel 2 er ideen her at isolere disse matricer som **skaleringsmatricer** der udelukkende virker i akseretningerne. Det vil vi gøre ved hjælp af en SVD dekomposition af en given matrix, sådan at 'resten' af faktorerne 'kun' roterer (eller flipper) tetraederne i rummet.

Med andre ord: Vi får brug for følgende specielle deformationsmatricer (bemærk, at de nu er

$3 \times 3$ -matricer):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x(\sigma_1) &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_y(\sigma_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_z(\sigma_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

En samtidig skalering i alle akseretningerne med skaleringskonstanterne  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , og  $\sigma_3$  fås naturligvis med matricen

$$\mathbf{S}_{xyz}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \mathbf{S}_z(\sigma_3) \cdot \mathbf{S}_y(\sigma_2) \cdot \mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} . \quad (4.13)$$

### ||| OPGAVE 4.3

|| Vis, at faktorernes orden er ligegyldig i ligning (4.13).

#### 4.1.3 Flip

Med henblik på at kunne præcisere at en given  $\mathbf{K}$ -matrix skifter orientering på et givet tetraeder, vil vi igen bruge en **flip-matrix**:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.14)$$

Bemærk specielt, at ligesom  $2 \times 2$ -flipmatricen har også denne  $3 \times 3$  version determinanten  $-1$ , samt at vi stadig har følgende egenskaber, der viser, at også  $(3 \times 3)$ -matricen  $\mathbf{F}$  er sin egen inverse matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^2 &= \mathbf{E} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{F} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Flip-matricen afbilder en vektor  $\mathbf{a}$  med koordinaterne  $(a_1, a_2, a_3)$  på den vektor, der har koordinaterne  $(a_2, a_1, a_3)$ . Det svarer til en spejling i den *plan*, der har ligningen  $y = x$ .

### OPGAVE 4.4

Diskutér igen (som for  $2 \times 2$ -flipmatricen) rimeligheden af betegnelsen *flipmatrix*. Find andre alternative muligheder for valg af simple  $3 \times 3$ -flip-matricer, der udelukkende har til formål at skifte orientering på et givet tetraeder, og intet andet.

#### 4.1.4 Rotationer i 3D rummet

Rotationer i rummet er generelt mere komplicerede end rotationerne i planen.

Vanskeligheden ligger ikke i definitionen af rotationsmatricer – definitionen er præcis den samme som vi kender for  $2 \times 2$  rotationsmatricer:

**Definition 4.5** En  $3 \times 3$ -rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  er en matrix, der opfylder de to egenskaber:

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \quad (4.16)$$

og

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^* \text{ som er ækvivalent med } \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} = \mathbf{E} \quad , \quad (4.17)$$

hvor  $\mathbf{E}$  betegner enhedsmatricen af type  $3 \times 3$ .

Problemet er, at der er mange flere af dem – de er ikke bestemt ved én rotationsvinkel, men ved tre rotationsvinkler som vi skal se nedenfor.

Først bemærker vi, at nogle rotationer ganske vist er særligt simple - det er **akserrotationerne**. De er repræsenterede ved følgende matricer, og drejer de angivne vinkler, nemlig henholdsvis  $u$ ,  $v$  og  $w$ , om de angivne akser, henholdsvis  $x$ -aksen,  $y$ -aksen, og  $z$ -aksen.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(u) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(u) & -\sin(u) \\ 0 & \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_y(v) &= \begin{bmatrix} \cos(v) & 0 & -\sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v) & 0 & \cos(v) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_z(w) &= \begin{bmatrix} \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

### OPGAVE 4.6

Vis ved direkte udregninger, at de tre akserrotationsmatricer virkelig *er* rotationsmatricer som defineret i definition 4.5. Vis også, der gælder følgende identiteter for de tilhørende inverse akse-rotationsmatricer:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x^{-1}(u) &= \mathbf{R}_x^*(u) = \mathbf{R}_x(-u) \\ \mathbf{R}_y^{-1}(v) &= \mathbf{R}_y^*(v) = \mathbf{R}_y(-v) \\ \mathbf{R}_z^{-1}(w) &= \mathbf{R}_z^*(w) = \mathbf{R}_z(-w) \quad .\end{aligned}\tag{4.19}$$

### OPGAVE 4.7

Find billedvektorerne ved brug af de angivne rotationsmatricer  $\mathbf{K}_i$  på hver af de angivne vektorer  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , og  $\mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{R}_z(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_5 &= \mathbf{R}_x(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1)\end{aligned}\tag{4.20}$$

Sammensætning af rotationer om koordinataksene med givne drejningsvinkler  $u$ ,  $v$ , og  $w$  om henholdsvis  $x$ -aksen,  $y$ -aksen, og  $z$ -aksen fås ved at finde matrixproduktet af de tre tilsvarende rotationsmatricer.

Her er det helt generelle udtryk for det matrixprodukt for alle værdier af  $u$ ,  $v$  og  $w$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{xyz}(u, v, w) &= \mathbf{R}_z(w) \cdot \mathbf{R}_y(v) \cdot \mathbf{R}_x(u) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(w) \cos(v) & -\sin(w) \cos(u) - \cos(w) \sin(v) \sin(u) & \sin(w) \sin(u) - \cos(w) \sin(v) \cos(u) \\ \sin(w) \cos(v) & \cos(w) \cos(u) - \sin(w) \sin(v) \sin(u) & -\cos(w) \sin(u) - \sin(w) \sin(v) \cos(u) \\ \sin(v) & \cos(v) \sin(u) & \cos(v) \cos(u) \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

Der gælder nu følgende behagelige sætning, som siger, at selv om der er mange rotationsmatricer, så kan hver enkelt af dem skrives om et produkt af akserrotationsmatricer:

**Sætning 4.8** Enhver rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  kan skrives på formen  $\mathbf{R}(u, v, w)$ , dvs. virkningen af enhver rotationsmatrix kan repræsenteres ved tre på hinanden følgende rotationer om koordinataksene. Med andre ord: For enhver given rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  findes der vinkelværdier  $u$ ,  $v$ , og  $w$  således at

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{xyz}(u, v, w) = \mathbf{R}_z(w) \cdot \mathbf{R}_y(v) \cdot \mathbf{R}_x(u) \quad .\tag{4.21}$$



Når  $\mathbf{R}$  er givet (med sine matrix-elementer  $r_{ij}$ ), er det heller ikke svært at finde disse akserotations-vinkler. Som det fremgår af matrixproduktet ovenfor er f.eks.  $\sin(v) = r_{31}$  sådan at  $v = \arcsin(r_{31})$  eller  $v = \pi - \arcsin(r_{31})$ , og  $\cos(w)\cos(v) = r_{11}$  sådan at  $w = \arccos(r_{11}/\cos(v))$  eller  $v = -\arccos(r_{31}/\cos(v))$ , når blot  $\cos(v) \neq 0$  dvs. når blot  $v \neq \pm\pi/2$ .

### OPGAVE 4.9

Vis, at hvis  $v = \pi/2$  eller  $v = -\pi/2$ , så er der mange værdier af  $u$  og  $w$  som giver den *samme*  $\mathbf{R}(u, v, w)$ . Det vil sige, at vinkelværdierne ikke i alle tilfælde er entydigt bestemte i intervallet  $] -\pi, \pi ]$  for enhver givet rotationsmatrix  $\mathbf{R}$ .

### OPGAVE 4.10

Vis, at hvis  $\mathbf{R}$  er en rotationsmatrix, så er  $\mathbf{R}^*$  også en rotationsmatrix, og omvendt, hvis  $\mathbf{R}^*$  er en rotationsmatrix, så er  $\mathbf{R}$  også en rotationsmatrix.

### OPGAVE 4.11

Vis, at hvis  $\mathbf{R}_1$  og  $\mathbf{R}_2$  er rotationsmatricer, så er  $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2$  og  $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$  også rotationsmatricer. Giv eksempler på, at  $\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2$  ikke nødvendigvis er den samme rotationsmatrix som  $\mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{R}_1$ .

### OPGAVE 4.12

Opgaven, eksemplet, her går ud på at vise, at alle rotationsmatricer *bevarer skalar-produkter* og dermed også længder og vinkler. Lad  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  være to vektorer i rummet, f.eks. kantvektorer i en trekant  $\Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  og lad  $\mathbf{R}$  betegne en vilkårlig rotations-matrix.

Vi bruger  $\mathbf{R}$  som deformationsmatrix på  $\Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$  og får derved den nye 'deformerede' trekant:  $\Delta(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$ , hvor

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}^* &= \mathbf{R}\mathbf{a}^* \\ \tilde{\mathbf{b}}^* &= \mathbf{R}\mathbf{b}^* \end{aligned} \quad , \quad (4.22)$$

og vil vise, at skalarprodukterne  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  og  $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}}$  har samme værdi:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} \quad . \quad (4.23)$$

Ligningen (4.22) kan 'skrives ud' på følgende måde:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad .$$

Hvis vi transponerer på begge sider af lighedstegnene får vi:

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{a}_3] &= [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \cdot \mathbf{R}^* \\ [\tilde{b}_1 \quad \tilde{b}_2 \quad \tilde{b}_3] &= [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \cdot \mathbf{R}^* \quad , \end{aligned} \tag{4.25}$$

Vis nu først, at skalarprodukterne  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  og  $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}}$  kan skrives som matrix-produkter:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} &= [\tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{a}_3] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{4.26}$$

og benyt dette sammen med ovenstående og rotationsmatrixens egenskaber til at indse:

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad . \tag{4.27}$$

Så gælder specielt også

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \tag{4.28}$$

og derfor ligeledes

$$\begin{aligned} \cos(\angle(\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})) &= \frac{\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}}}{\|\tilde{\mathbf{a}}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{b}}\|} \\ &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad , \end{aligned} \tag{4.29}$$

således at både længder og vinkler bevares ved 'deformation' med en rotationsmatrix.

## 4.2 Hovedsætningen for 3D (deformations-)matricer

Ligesom for  $2 \times 2$ -matricer gælder der for  $3 \times 3$ -matricer, at de kan dekomponeres i et produkt af 4 standard deformationsmatricer:

**Sætning 4.13** Enhver regulær  $3 \times 3$ -(deformations-)matrix  $\mathbf{K}$  kan skrives som et produkt af 4 matricer således:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad , \tag{4.30}$$

hvor  $\mathbf{U}$  og  $\mathbf{V}$  er  $3 \times 3$ -rotationsmatricer,  $\mathbf{\Sigma}$  er en entydigt bestemt diagonalmatrix med positive diagonalelementer, altså en akseskaleringsmatrix:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \text{hvor } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0, \quad (4.31)$$

og  $\hat{\mathbf{F}}$  er flip-matricen (hvis  $\det(\mathbf{K}) < 0$ ) eller enhedsmatricen (hvis  $\det(\mathbf{K}) > 0$ ):

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{hvis } \det(\mathbf{K}) < 0, \quad (4.32)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{hvis } \det(\mathbf{K}) > 0.$$

Da både  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ , og  $\mathbf{V}^*$  er rotationsmatricer, kan de selv dekomponeres. Hver af rotationsmatricerne kan faktoriseres i 3 basisrotationer om koordinataksene. Specielt for de tre rotationsmatricer  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ , og  $\mathbf{V}^*$  har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{R}_z(w_U) \cdot \mathbf{R}_y(v_U) \cdot \mathbf{R}_x(u_U) = \mathbf{R}_{xyz}(u_U, v_U, w_U) \\ \mathbf{V} &= \mathbf{R}_z(w_V) \cdot \mathbf{R}_y(v_V) \cdot \mathbf{R}_x(u_V) = \mathbf{R}_{xyz}(u_V, v_V, w_V) \\ \mathbf{V}^* &= \mathbf{R}_z(w_{V^*}) \cdot \mathbf{R}_y(v_{V^*}) \cdot \mathbf{R}_x(u_{V^*}) = \mathbf{R}_{xyz}(u_{V^*}, v_{V^*}, w_{V^*}) \\ &= \mathbf{R}_z(-w_V) \cdot \mathbf{R}_y(-v_V) \cdot \mathbf{R}_x(-u_V) = \mathbf{R}_{xyz}(-u_V, -v_V, -w_V) \end{aligned} \quad (4.33)$$

for passende værdier af drejningsvinkler  $u_U, v_U, w_U$  og  $u_{V^*} = -u_V, v_{V^*} = -v_V, w_{V^*} = -w_V$ .

Det er dog især deformationsfaktoren  $\mathbf{\Sigma}$  vi er interesserede i, fordi det er skaleringerne i akseretningerne, der egentlig deformerer geometrien af de objekter vi 'bruger' matricen  $\mathbf{K}$  på, se opgaverne nedenfor.

#### Metode 4.14

Metoden til at bestemme faktorerne i dekompositionen, **SVD af  $3 \times 3$ -matricer**, er præcis den samme som for  $2 \times 2$ -matricer, nu blot generaliseret til 3D:

1. Hvis  $\det(\mathbf{K}) > 0$  sådan at  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$  så er proceduren følgende:

- (a)  $\mathbf{\Sigma}$  fås ud fra egenverdierne for den symmetriske matrix  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ . De egenverdier er igen altid positive - vi kalder dem  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  og  $\sigma_3^2$  og nummererer dem i størrelse, sådan at  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2$ . De respektive kvadratrødder af disse egenverdier for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  er så  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

- (b) Søjlerne i  $\mathbf{V}$  er ortogonale enheds-eigenvektorer  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , og  $\mathbf{v}_3$  svarende til egenverdierne  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ , og  $\sigma_3^2$  for den symmetriske matrix  $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ . Eigenvektorerne skal vælges sådan at  $\mathbf{V}$  har positiv determinant (det er igen altid muligt, eventuelt ved at skifte fortegn på én af eigenvektorerne):

$$\mathbf{V} = [ \mathbf{v}_1^* \quad \mathbf{v}_2^* \quad \mathbf{v}_3^* ] \quad . \quad (4.34)$$

Matricen  $\mathbf{V}^*$  (til dekomponeringen) fås ved at transponere den fundne  $\mathbf{V}$ .

- (c) Søjlerne i  $\mathbf{U}$  er de koordinat-søjlevektorer  $\mathbf{u}_1^*$ ,  $\mathbf{u}_2^*$  og  $\mathbf{u}_3^*$ , som fås direkte ved at udregne

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{K} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sigma_2} \mathbf{K} \mathbf{v}_2^* \\ \mathbf{u}_3^* &= \frac{1}{\sigma_3} \mathbf{K} \mathbf{v}_3^* \end{aligned} \quad (4.35)$$

og indsætte dem som søjler i  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = [ \mathbf{u}_1^* \quad \mathbf{u}_2^* \quad \mathbf{u}_3^* ] \quad . \quad (4.36)$$

2. Hvis  $\det(\mathbf{K}) < 0$  sådan at  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}$ , så er proceduren følgende:

- (a) Sæt  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$ . Så er  $\det(\tilde{\mathbf{K}}) > 0$  og vi kan dekomponere  $\tilde{\mathbf{K}}$  ved at indsætte  $\tilde{\mathbf{K}}$  på  $\mathbf{K}$ 's plads i de tre punkter (a), (b), og (c) ovenfor i 1. procedure for  $3 \times 3$ -matricer med positiv determinant. Vi kan notere resultatet, den resulterende dekomponering, på følgende måde:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\Sigma} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^* \quad (4.37)$$

- (b) Så kan  $\mathbf{K}$  selv direkte skrives på dekomponeret form således:

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\Sigma} \cdot \tilde{\mathbf{V}}^* \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad . \quad (4.38)$$

### OPGAVE 4.15

Med hensyn til metodens punkt 1b) vedrørende skift af fortegn på en egenvektor  $\mathbf{v}$  med henblik på at opnå en positiv determinant af  $\mathbf{V}$ : Vis helt generelt, at hvis  $\mathbf{v}$  er en egenvektor med tilhørende egenverdi  $\lambda$ , så er  $-\mathbf{v}$  også en egenvektor med den *samme* tilhørende egenverdi  $\lambda$ .

Vi vil først se på et forholdsvist simpelt eksempel på en total faktorisering af en konkret  $3 \times 3$ -matrix  $\mathbf{K}$ .



### Eksempel 4.16

Vi har givet matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

og vil finde faktoriseringsmatricer  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{V}^*$ , og  $\hat{\mathbf{F}}$  for  $\mathbf{K}$ :

Determinanten af  $\mathbf{K}$  er  $\det(\mathbf{K}) = 6 > 0$ , så  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$  = enhedsmatricen af type  $3 \times 3$ . Vi har også

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Denne matrix har egenverdierne 9, 4, og 1, så de tilsvarende  $\sigma_i$  værdier er  $\sigma_1 = 3$ ,  $\sigma_2 = 2$ , og  $\sigma_3 = 1$ , altså:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Matricen  $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$  har følgende ortogonale enheds-egenvektorer svarende til egenverdierne 9, 4, og 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2) \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) \end{aligned} \quad (4.42)$$

### OPGAVE 4.17

Eftersis direkte, at de påstande er rigtige, altså at  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  har de påståede egenvektorer  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , og  $\mathbf{v}_3$ ; at de er parvis ortogonale; at de alle tre har længden 1; og at de tilhørende egenverdier er de nævnte.

Vi har derfor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

og dermed den transponerede matrix:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Vi mangler så kun at bestemme  $\mathbf{U}$ .

I henhold til forskriften får vi søjlerne i rotationsmatricen  $\mathbf{U}$  ved

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} . \quad (4.46)$$

### ||| OPGAVE 4.18

Check ved direkte udregninger, at der i ovenstående eksempel 4.32 gælder

1. De fundne faktorer giver den oprindelige matrix, som påstået, altså:  $\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \hat{\mathbf{F}}$ .
2. De tre matricer  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ , og  $\mathbf{V}^*$  har ortogonale enhedsvektorer som søjler og alle tre matricer har determinant 1. Med andre ord: De er rotationsmatricer.
3. Matricen  $\mathbf{U}$  kan skrives som et produkt af 3 akserotationer:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_z(\pi/3) \cdot \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_{xyz}\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) . \quad (4.47)$$

4. Matricen  $\mathbf{V}$  kan også skrives som et produkt af 3 akserotationer:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_z(0) \cdot \mathbf{R}_y(-\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_{xyz}\left(0, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) . \quad (4.48)$$

5. Matricen  $\mathbf{V}^*$  kan derfor ligeledes skrives som et produkt af 3 akserotationer:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{R}_z(0) \cdot \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_{xyz}\left(0, \frac{\pi}{4}, 0\right) . \quad (4.49)$$

### OPGAVE 4.19

Dekomponér følgende matricer som i eksempel 4.32, idet der også gøres prøve til sidst for at checke, at de 4 faktorer i dekompositionen virkelig giver den ønskede matrix når de ganges sammen i den rigtige rækkefølge.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_7 &= 1000 \cdot \mathbf{K}_5 \\
 \mathbf{K}_8 &= \frac{1}{1000} \cdot \mathbf{K}_5 \quad .
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

## 4.3 Konstruktion af tetraedre, energi

Fra kapitel 2 kender vi fabrikkerne  $M_P$  og  $M_Q$ , der kan producere trekanter ud fra basistrekanten til en pris der fastsættes direkte ud fra  $\sigma_i$  værdierne i dekompositionen af den tilhørende deformationsmatrix.

Fabrikken  $M_P$  producerer også tetraedre - ved at deformere basistetraedre. Og prisen er - ikke overraskende - bestemt ved:

**Definition 4.20** Prisen for at få et basistetraeder deformeret til et tetraeder  $\tilde{\boxtimes} = \mathbf{K} \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  (med samme fodpunkt  $O$ ) er:

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1)^2 + (1 - \sigma_2)^2 + (1 - \sigma_3)^2 \quad , \tag{4.51}$$

hvor  $\sigma_i$  er diagonalelementerne i faktoren  $\Sigma$  for  $\mathbf{K}$ , altså kvadratrødderne af egenverdierne for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

### OPGAVE 4.21

Bestem deformations-prisen på fabrikken  $M_P$  for hver af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathfrak{X}}_1 &= \boxtimes(O, (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)) \\
 \tilde{\mathfrak{X}}_2 &= \boxtimes(O, (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)) \\
 \tilde{\mathfrak{X}}_3 &= \boxtimes(O, (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), (0, 2, 0), (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})) \\
 \tilde{\mathfrak{X}}_4 &= \boxtimes(O, (1, \sqrt{3}, 6), (-4\sqrt{3}, 4, 0), (-3, -3\sqrt{3}, -2)) \\
 \tilde{\mathfrak{X}}_5 &= \boxtimes(O, (1, 2, 1), (1, 1, 0), (2, -1, -2)) \\
 \tilde{\mathfrak{X}}_6 &= \boxtimes(O, (1, 1, 1), (-1, 3, 2), (-1, 2, 1)) \quad .
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

### OPGAVE 4.22

Formulér selv en opgave, der svarer til en 3D versionering af opgave 2.22 i kapitel 2, og løs den. Vink: Benyt et polyeder i rummet, hvor alle sideflader er lige store ligesidede trekanter.

### OPGAVE 4.23

Formulér selv en opgave, der svarer til en 3D versionering af opgave 2.27 i kapitel 2, og løs den.

### OPGAVE 4.24

Lad  $\mathbf{K}$  være en regulær  $3 \times 3$ -matrix og sæt  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$ . Vis, at  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  har de samme egenverdier som  $\tilde{\mathbf{K}}^* \cdot \tilde{\mathbf{K}}$ , således at de to matrixer  $\tilde{\mathbf{K}}$  og  $\mathbf{K}$  ligeledes har den samme  $\Sigma$ -matrix.

### OPGAVE 4.25

Lad  $\mathbf{R}$  være en vilkårlig  $(3 \times 3)$ -rotationsmatrix. Vis, at søjlevektorerne i  $\mathbf{R}$  er parvis ortogonale og at de alle tre har længden 1. Vink: Benyt ligning (4.17) direkte.

## 4.4 Den generelle SVD hovedsætning for $(m \times n)$ -matrixer

Vi præsenterer i de følgende afsnit **SVD (Singular Value Decomposition)**-sætningen for helt generelle matrixer  $\mathbf{K}$  med  $m$  rækker og  $n$  søjler. Groft sagt siger resultatet at enhver matrix  $\mathbf{K}$

kan diagonaliseres. Lidt mere præcist gælder, at enhver matrix  $\mathbf{K}$  kan skrives som et produkt af to ortogonale matricer og en 'diagonalmatrix' – se eksempel 4.32 nedenfor. En geometrisk konsekvens er at enhver lineær afbildning fra  $\mathbb{R}^n$  ind i  $\mathbb{R}^m$  kan opnås ved sammensætning dels af rotationer om koordinataksene og dels af skaleringer i akse-retningerne som vi allerede har set eksempler på i plan og rum.

Vi skal her bruge de helt generelle  $(n \times n)$ -rotationsmatricer. De defineres nedenfor, men definitionen er allerede velkendt for  $n = 2$  og  $n = 3$  fra rotationerne i plan og rum.

## 4.5 Den generelle SVD delt i to

Vi deler den generelle SVD sætning i to dele.

Den ene del, sætning 4.29 handler kun om dekomposition af kvadratformede regulære matricer.

Den anden del, sætning 4.30 handler om dekomposition af alle de andre matricer, dvs. matricer, der enten ikke er kvadratformede eller ikke har maksimal rang.

I begge sætninger optræder som nævnt rotationsmatricer af forskellige størrelser:

||| **Definition 4.26** En matrix  $\mathbf{R}$  er en rotationsmatrix hvis den opfylder de to betingelser:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{E} \\ \det(\mathbf{R}) &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{4.53}$$

Dvs.  $\mathbf{R}$  er en rotationsmatrix hvis søjlerne i  $\mathbf{R}$  er parvis ortogonale enheds-vektorer og determinanten er 1.

### ||| OPGAVE 4.27

|| Vis direkte ud fra definitionen 4.26 at hvis  $\mathbf{R}$  er en rotationsmatrix, så er  $\mathbf{R}^*$  også en rotationsmatrix.

I den første sætning optræder ligeledes den velkendte flipmatrix  $\mathbf{F}$ , men nu i  $(p \times p)$ -udgave:

||| **Definition 4.28** Flip-matricen af type  $(p \times p)$  er den matrix  $\mathbf{F}$  der fremkommer fra  $(p \times p)$ -enhedsmatricen  $\mathbf{E}$  ved at bytte om på de to første søjler i  $\mathbf{E}$ .

Med andre ord: Når  $\mathbf{F}$  ganges på en vilkårlig  $(q \times p)$ -matrix  $\mathbf{K}$  fra højre, så er resultatet, at de to første søjler i  $\mathbf{K}$  bytter plads. Når  $\mathbf{F}$  ganges på en vilkårlig  $(p \times q)$ -matrix  $\mathbf{K}$  fra venstre, så er resultatet, at de to første rækker i  $\mathbf{K}$  bytter plads.

## 4.5.1 SVD for regulære kvadratformede matricer

Vi formulerer her først SVD dekompositionen for de regulære matricer (med  $m = n$ ):

||| **Sætning 4.29** Lad  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{n,n}$  betegne en kvadratformet matrix med  $\det(\mathbf{K}) \neq 0$ .

Så findes der en rotationsmatrix  $\mathbf{U}$ , en rotationsmatrix  $\mathbf{V}$ , samt en diagonal-matrix  $\mathbf{\Sigma}$  sådan at:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad , \quad (4.54)$$

hvor

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{cases} \mathbf{E}, & \text{hvis } \det(\mathbf{K}) > 0 \quad ; \\ \mathbf{F}, & \text{hvis } \det(\mathbf{K}) < 0 \quad , \end{cases} \quad (4.55)$$

og hvor

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

med ordnet diagonal:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0 \quad . \quad (4.57)$$

De  $n$  kvadrattal  $\sigma_i^2, i = 1, \dots, n$ , er egenverdierne for matricen  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

De  $n$  positive diagonalelementer  $\sigma_i, i = 1, \dots, n$ , dvs. de positive kvadratrødder af egenverdierne for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  kaldes de **singulære værdier** for  $\mathbf{K}$ :

Søjlerne i  $\mathbf{V}$  er koordinatsøjlematricerne for parvis ortogonale normerede egenvektorer  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$ , for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  arrangeret i samme rækkefølge som de tilhørende  $n$  egenverdier  $\sigma_i^2, i = 1, \dots, n$ .

Matricen  $\mathbf{V}$  diagonaliserer altså  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

De  $n$  egenvektorer  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$ , for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  kaldes de **højre-singulære vektorer** for  $\mathbf{K}$ .

Den ortogonale matrix  $\mathbf{U}$  bestemmes dernæst direkte således:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma}^{-1} \quad . \quad (4.58)$$

Matricen  $\mathbf{U}$  diagonaliserer  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ .

De  $n$  søjlevektorer  $\mathbf{u}_j, j = 1, \dots, n$ , i  $\mathbf{U}$  kaldes de **venstre-singulære vektorer** for  $\mathbf{K}$ .

Ovenstående sætning 4.29 bevises til sidst i dette kapitel, i afsnit 4.7. Metoden til den konkrete anvendelse af sætningen har vi allerede set tidligere med eksempler der illustrerer dekompositionen af regulære  $(2 \times 2)$ - og  $(3 \times 3)$ -matricer.

## 4.5.2 SVD for alle de andre matricer

Den generelle SVD sætning for alle andre matricer, end dem der behandles i ovenstående sætning 4.29, er lidt mere kringlet og kræver lidt mere 'lagerforvaltning' men essensen er den samme: Vi får dekomponeret en given matrix i et produkt af tre standard matricer: to rotationsmatricer og en akse-skaleringsmatrix – her *uden brug af flipmatricen*:

### ||| Sætning 4.30

Lad  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{m,n}$  betegne en matrix med  $m$  rækker og  $n$  søjler og rang  $\rho > 0$ .

Antag, at  $m \neq n$  eller  $\rho < \min\{m, n\}$ . Dvs. enten er matricen ikke kvadratformet eller rangen ikke maksimal.

Så findes der en rotationsmatrix  $\mathbf{U}$  af type  $m \times m$ , en rotationsmatrix  $\mathbf{V}$  af type  $n \times n$  samt en matrix  $\mathbf{\Sigma}$  af type  $m \times n$  sådan at

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad . \quad (4.59)$$

Hvis  $m \leq n$  er

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_{m,n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (4.60)$$

og hvis  $m \geq n$  fås

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_{m,n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (4.61)$$

hvor 'diagonalelementerne' er i ordnet rækkefølge:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q \geq 0 \quad , \quad q = \min\{m, n\} \quad . \quad (4.62)$$

De  $q$  kvadrattal  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, q$ , er de første  $q$  egenverdier (fra de ialt  $m$  ordnede egenverdier) for  $(m \times m)$ -matricen  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

De  $q$  positive 'diagonal'-elementer  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , dvs. de **positive kvadratrødder** af egenverdierne for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  kaldes de **singulære værdier** for  $\mathbf{K}$ .

Matricen  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  (som er af type  $n \times n$ ) og matricen  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$  (af type  $m \times m$ ) er begge symmetriske og har de samme  $\rho$  positive egenverdier  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ . De resterende  $n - \rho$  henholdsvis  $m - \rho$  egenverdier er alle 0.

Søjlerne i  $\mathbf{V}$  er koordinatsøjlematricerne for parvis ortogonale normerede egenvektorer  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  arrangeret i samme rækkefølge som de tilhørende  $n$  egenverdier  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Matricen  $\mathbf{V}$  diagonaliserer altså  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

De  $n$  egenvektorer  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  kaldes de **højre-singulære vektorer** for  $\mathbf{K}$ .

Søjlerne i  $\mathbf{U}$  er koordinatsøjlematricerne for parvis ortogonale normerede egenvektorer  $\mathbf{u}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , for  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ , igen arrangeret i samme rækkefølge som de tilhørende  $m$  egenverdier  $\sigma_j^2$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Matricen  $\mathbf{U}$  diagonaliserer altså  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ .

De  $m$  egenvektorer  $\mathbf{u}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , for  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$  kaldes de **venstre-singulære vektorer** for  $\mathbf{K}$ .



Alle ingredienserne til den konkrete dekomposition af  $\mathbf{K}$  er allerede nævnt i sætningerne – på nær i sætning 4.30 afgørelsen af, hvordan  $\mathbf{U}$  og  $\mathbf{V}$  kan organiseres sådan at de bliver til de 'korrekte' rotationsmatricer der kan bruges i dekompositionen helt uden brug af flipmatricen  $\mathbf{F}$ . Det vil vi se nærmere på nu i metode 4.31 nedenfor. Straks efter denne metode for implementering af sætning 4.30 vil vi se på helt konkrete anvendelser af sætningen og metoden på eksempler med generelle matricer af den slags som sætning 4.30 omhandler.

|||| **Metode 4.31** Vi kan antage, at  $m \leq n$  fordi ellers (hvis  $m > n$ ) dekomponerer vi blot  $\mathbf{K}^*$  og får så dekompositionen for  $\mathbf{K}$  ved bagefter at transponere tilbage igen.

Vi benytter os af, at der er  $\rho$  positive egenverdier  $\sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ , for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ , sådan at vi kan bestemme  $\rho$  parvis ortogonale enheds-egenvektorer  $\mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, \rho$  for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

Vi benytter vektorerne  $\mathbf{v}_i$  til at konstruere ialt  $\rho$  parvis ortogonale enheds-egenvektorer  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ , for  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ :

$$\mathbf{u}_i = \left( \frac{1}{\sigma_i} \right) \mathbf{K} \mathbf{v}_i^* \quad , \quad i = 1, \dots, \rho \quad . \quad (4.63)$$

Dernæst finder vi  $m - \rho$  parvis ortogonale enheds-egenvektorer  $\mathbf{u}_j$ ,  $j = 1, \dots, m - \rho$ , hørende til egenverdierne 0 for  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ .

Hvis  $\rho < m$  ændres eventuelt fortegn på en af de sidstnævnte egenvektorer, således at  $\mathbf{U}$  får determinanten +1. Hvis  $\rho = m$  ændres eventuelt fortegn på en af de ovenfor (i ligning (4.63)) anvendte egenvektorer  $\mathbf{v}_i$ , således at  $\mathbf{U}$  får determinanten +1.



Dermed har vi konstrueret rotationsmatricen  $\mathbf{U}$ .

De  $\rho$  parvis ortogonale enheds-eigenvektorer  $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, \rho$ , for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  benyttes tilsvarende som søjler i  $\mathbf{V}$ -matricen, idet der ligeledes kompletteres med  $n - \rho$  parvis ortogonale enheds-eigenvektorer  $\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, n - \rho$ , hørende til egenværdien 0 for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

Hvis  $\rho = m$ , så gælder per antagelse også at  $m < n$ , hvilket betyder, at der i de tilfælde er mindst én egenvektor for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  hørende til egenværdien 0. Om nødvendigt skiftes der fortegn på denne egenvektor med henblik på ligeledes at opnå at  $\mathbf{V}$  får determinanten  $+1$ .

Dermed har vi også konstrueret rotationsmatricen  $\mathbf{V}$ .

Det kan til slut kontrolleres, at de fundne ingredienser dekomponerer  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad . \quad (4.64)$$

Denne metode illustreres nedenfor via dekomposition af et par konkrete, relativt små, matricer.

## 4.6 Eksempler på brug af den generelle SVD

Vi ser først på et forholdsvist simpelt eksempel og gennemgår en total faktorisering af en konkret  $2 \times 3$ -matrix  $\mathbf{K}$ :

### Eksempel 4.32

Vi har givet  $(2 \times 3)$ -matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad , \quad (4.65)$$

og vil finde faktoriseringmatricer  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  og  $\mathbf{V}^*$  for  $\mathbf{K}$ . Vi finder først:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.66)$$

Denne matrix har egenværdierne 5, 4, og 0, så de tilsvarende  $\sigma_i$  værdier er  $\sigma_1 = \sigma_{11} = \sqrt{5}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{22} = 2$ , og  $\sigma_3 = \sigma_{33} = 0$ . Det vil sige, at den  $(2 \times 3)$ -'diagonal'-matrix  $\mathbf{\Sigma}$ -matrix vi skal bruge til dekompositionen af  $\mathbf{K}$ , er følgende:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (4.67)$$

Matricen  $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$  har følgende ortogonale enheds-eigenvektorer svarende til egenverdierne 5, 2, og 0:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-1/2, 0, 1) / \sqrt{5/4} \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= (-2, 0, -1) / \sqrt{5} \end{aligned} \quad (4.68)$$

### OPGAVE 4.33

Eftervis direkte, at de påstande er rigtige, altså at  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  har de påståede egenvektorer  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , og  $\mathbf{v}_3$ ; at de er parvis ortogonale; at de alle tre har længden 1; at de tilhørende egenverdier er de nævnte; og at determinanten af den tilhørende matrix  $\mathbf{V}$  er +1 som den skal være.

Vi har derfor:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

således af den transponerede matrix  $\mathbf{V}^*$ , som vi skal bruge i dekompositionen, er følgende – tilfældigvis den samme som  $\mathbf{V}$  selv:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

Matricen  $\mathbf{V}$  diagonaliserer  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$ .

Vi mangler så kun at bestemme  $\mathbf{U}$ .

I henhold til forskriften får vi de to søjler i rotationsmatricen  $\mathbf{U}$  ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} \mathbf{K} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \mathbf{K} \mathbf{v}_2^* \end{aligned} \quad (4.71)$$

Det vil sige:

$$\mathbf{u}_1^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$\mathbf{u}_2^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

som (heldigvis) har den korrekte determinant  $+1$  (!). Se opgave 4.34 nedenfor.

Matricen  $\mathbf{U}$  diagonaliserer  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ .

Vi checker til sidst, at de fundne ingredienser faktisk dekomponerer  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* &= \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\sqrt{5}/2 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{15}/2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{K} \quad .
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

### OPGAVE 4.34

Overvej nøje og beskriv, hvad der ville være sket (specielt konsekvensen for  $\mathbf{U}$ ) i ovenstående udregninger, hvis vi i stedet for  $\mathbf{V}$  havde valgt følgende matrix  $\mathbf{V}_a$ , hvor søjlerne ligeledes er parvis ortogonale enheds-egenvektorer for  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  svarende til egenverdierne i den korrekte rækkefølge, og hvor determinanten ligeledes er  $+1$ , således at  $\mathbf{V}_a$  derfor på det sted i udregningerne også ville have været en tilladelig kandidat for  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V}_a = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.75}$$

Kunne vi (også) have benyttet følgende alternativ?:

$$\mathbf{V}_b = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.76}$$

### OPGAVE 4.35

I eksemplet 4.32 ovenfor: Vis ved direkte udregning, at den fundne matrix  $\mathbf{U}$  diagonaliserer matricen  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ , dvs.:

$$\mathbf{U}^* \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*) \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.77}$$

### Eksempel 4.36

En  $(2 \times 7)$ -matrix er givet:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Vi har først brug for følgende produkt til dekomposition:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

der har de egentlige egenverdier (dem der ikke er 0):  $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$  og  $\sigma_1 = \sqrt{3}$  sådan at

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

De tilhørende parvis ortogonale enheds-egenvektorer er nedenfor skrevet ind i en  $\mathbf{V}$ -matrix, således at den første søjle er koordinatsøjlematricen for en normeret egenvektor  $\mathbf{v}_1$  hørende til egenværdien  $2\sqrt{2}$  og den anden søjle er koordinatsøjlematricen for en normeret egenvektor  $\mathbf{v}_2$  hørende til egenværdien  $\sqrt{3}$ .

De øvrige søjler er normerede parvis ortogonale egenvektorer hørende til den fælles egenværdi 0. De er løsninger til det homogene ligningssystem  $(\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}) \mathbf{x}^* = \mathbf{0}^*$ . De er automatisk vinkelrette på  $\mathbf{v}_1$  og  $\mathbf{v}_2$ :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/20 & 2\sqrt{15}/15 & 0 & 0 & -\sqrt{10}/5 & 3\sqrt{10}/20 & -\sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{10}/20 & -2\sqrt{15}/15 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{10}/4 & \sqrt{3}/6 \\ 3\sqrt{10}/20 & \sqrt{15}/15 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/20 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{10}/10 & \sqrt{15}/15 & 0 & 0 & \sqrt{10}/5 & \sqrt{10}/10 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{10}/20 & \sqrt{15}/15 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/20 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{10}/5 & 2\sqrt{15}/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

I henhold til forskriften får vi de to søjler i rotationsmatricen  $\mathbf{U}$  ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^* &= \left( \frac{1}{\sigma_1} \right) \mathbf{K} \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \left( \frac{1}{\sigma_2} \right) \mathbf{K} \mathbf{v}_2^* \end{aligned} \quad (4.82)$$

Det vil sige:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (\sqrt{5}/5, -2\sqrt{5}/5) \\ \mathbf{u}_2 &= (2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5) \end{aligned}, \quad (4.83)$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & 2\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

som har determinanten  $+1$ .

Til sidst kan nu igen checkes, at de fundne ingredienser faktisk dekomponerer  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* = \mathbf{K}. \quad (4.85)$$

### OPGAVE 4.37

Eftervis direkte, at påstandene i eksemplet 4.36 ovenfor er rigtige, altså at  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  har de påståede egenvektorer; at de er parvis ortogonale; at alle syv har længden 1; at de tilhørende egenverdier er de nævnte; og at determinanten af  $\mathbf{V}$  er  $+1$ , som den skal være.

### OPGAVE 4.38

Brug Maple til at rekonstruere samtlige beregninger i eksemplet 4.36 ovenfor, herunder kontrollen af ligning (4.85).

### Eksempel 4.39

Vi ser her på et eksempel, der er kvadratformet men som ikke har fuld rang, og som derfor er omfattet af sætning 4.30:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Vi beregner ligesom tidligere:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

der har egenverdierne  $\sigma_1^2 = 11$ ,  $\sigma_2^2 = 4$ , og  $\sigma_3^2 = 0$ , sådan at

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

De til egenverdierne hørende parvis ortogonale enheds-egenvektorer er følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (0, 0, 1) \\ \mathbf{v}_2 &= (-1, 1, 0)/\sqrt{2} \\ \mathbf{v}_3 &= (-1, -1, 0)/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (4.89)$$

således at:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.90)$$

En beregning viser også, at  $\det(\mathbf{V}) = 1$ , så  $\mathbf{V}$  er en rotationsmatrix.

De to første søjler i  $\mathbf{U}$  får vi i henhold til forskriften således:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{11}} \mathbf{K} \mathbf{v}_1^* = (1, 1, 3) / \sqrt{11} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{K} \mathbf{v}_2^* = (-1, 1, 0) / \sqrt{2} . \end{aligned} \quad (4.91)$$

Den sidste vektor  $\mathbf{u}_3$  til  $\mathbf{U}$  finder vi som den egenvektor der hører til egenværdien 0 for matricen  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ ,

$$\mathbf{u}_3 = (-3, -3, 2) / \sqrt{22} , \quad (4.92)$$

sådan at:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{11} & -1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{22} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{2} & -3/\sqrt{22} \\ 3/\sqrt{11} & 0 & 2/\sqrt{22} \end{bmatrix} , \quad (4.93)$$

der ligesom  $\mathbf{V}$  har parvis ortogonale enheds-egenvektorer og determinanten +1, så den ligeledes er en rotationsmatrix.

Med

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

kan vi til slut checke, at de fundne ingredienser virkelig dekomponerer  $\mathbf{K}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma}) \cdot \mathbf{V}^* &= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V}^* \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K} . \end{aligned} \quad (4.95)$$

### OPGAVE 4.40

Bestem SVD dekompositioner for matricerne

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

og

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} . \quad (4.97)$$

### OPGAVE 4.41

Find ud af, hvordan de singulære værdier for en matrix  $\mathbf{K}$  kan bruges til at finde den såkaldte **Frobenius norm**  $\|\mathbf{K}\|_F$  af matricen. Vink: Se [Wiki: Matrix norm](#).

### OPGAVE 4.42

Find ud af, hvordan SVD dekompositionen af en matrix  $\mathbf{K}$  kan bruges til at definere den bedste (i least squares forstand) **'inverse matrix'** til  $\mathbf{K}$  – også hvor  $\mathbf{K}^{-1}$  slet ikke eksisterer i klassisk forstand (måske fordi  $\mathbf{K}$  ikke er kvadratformet (!) eller fordi rangen af  $\mathbf{K}$  ikke er maksimal). Vink: Se [Wiki: Moore–Penrose pseudoinverse](#).

## 4.7 Bevis for SVD for regulære matricer

### Bevis

Vi viser, at metoden virker, altså at opskriften giver den påståede dekomposition af  $\mathbf{K}$  for det regulære tilfælde hvor  $\mathbf{K}$  er kvadratformet med maksimal rang. Specielt skal vi indse, at  $\mathbf{U}$  er en rotationsmatrix der diagonaliserer  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$ . Antag, at  $\det(\mathbf{K}) > 0$  – ellers modificeres med  $\mathbf{F}$  som anvist i sætningen 4.29. Per konstruktion ved vi, at  $\mathbf{V}$  diagonaliserer  $\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$  til diagonalmatricen  $\Sigma^2$ :

$$\mathbf{V}^* \cdot (\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{V} = \Sigma^2 \quad . \quad (4.98)$$

Per konstruktion af  $\mathbf{U}$  har vi ligeledes nu, da  $\Sigma$  er kvadratformet, har fuld rang, positive diagonalelementer og en invers matrix  $\Sigma^{-1}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot \Sigma^{-1} \quad , \quad (4.99)$$

hvoraf følger dels, at  $\mathbf{K}$  dekomponerer som den skal:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{V}^* \quad , \quad (4.100)$$

og dels at  $\mathbf{U}$  er en rotationsmatrix:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{U} &= (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{K}^*) \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \\
 &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\
 &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2) \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\
 &= \mathbf{E} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.101}$$

og da determinanten af  $\mathbf{U}$  er positiv følger det, at  $\mathbf{U}$  er en rotationsmatrix.

Vi skal også vise, at  $\mathbf{U}$  diagonaliserer  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*$  til diagonalmatricen  $\boldsymbol{\Sigma}^2$ . Det følger således:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{U} &= (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{K}^*) \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^*) \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \\
 &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}) \cdot (\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\
 &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\Sigma}^2 \cdot \mathbf{V}^*) \cdot (\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^2) \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\
 &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^2 \cdot (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}^2 \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \\
 &= \boldsymbol{\Sigma}^2 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.102}$$

■



## ||| Kapitel 5

# Deformation af generelle tetraedre

Hvis vi har givet to regulære tetraedre, der er udsendt af hvert sit treben ud fra to givne (eventuelt forskellige) fodpunkter  $p_1$  og  $p_2$  således:

$$\boxtimes_1 = \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \tag{5.1}$$

$$\boxtimes_2 = \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) \quad ,$$

hvordan finder vi så den deformation, der deformerer  $\boxtimes_1$  til  $\boxtimes_2$ , og hvad koster deformationen, altså hvad er  $\sigma_i$ -værdierne for den tilhørende matrix?

## 5.1 Bestemmelse af deformationsmatrix og flytningsvektor

Det er ikke svært: Vi skal blot bestemme den matrix  $\mathbf{K}$ , der afbilder  $\mathbf{a}_1$  i den nye første kant-vektor  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{b}_1$  i den nye vektor  $\mathbf{b}_2$ , og  $\mathbf{c}_1$  i vektoren  $\mathbf{c}_2$ . Når vi har gjort det har vi dermed (med fodpunkt  $p_1$ ):

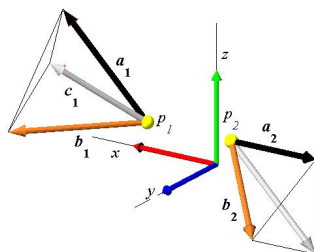
$$\begin{aligned} \tilde{\boxtimes} &= \mathbf{K} \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \\ &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) \quad . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Til sidst parallelforskyder vi hele tetraederet  $\boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$  fra fodpunkt  $p_1$  til det ønskede fodpunkt  $p_2$ .

Hvis vi lader  $\mathbf{k}$  betegne den vektor, der har fodpunkt  $p_1$  og spidspunkt  $p_2$ , så svarer denne nødvendige parallelforskydning til at addere  $\mathbf{k}$  til alle stedvektorerne i tetraederet  $\boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ .

Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned} \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) + \mathbf{k} \\ &= \mathbf{K} \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) + \mathbf{k} \quad . \end{aligned} \tag{5.3}$$



Figur 5.1: Et treben før ( $\boxtimes_1$ ) og efter ( $\boxtimes_2$ ) deformation.

Vi kan bestemme  $\mathbf{K}$  direkte ud fra ligning (4.8) i kapitel 4:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{bmatrix} \quad . \quad (5.4)$$

Begge matricerne  $\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{bmatrix}$  og  $\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{bmatrix}$  er regulære (med determinant forskellig fra 0). Med de betegnelser har vi så:

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}_1 \quad . \quad (5.5)$$

Vi kan dividere med  $\mathbf{K}_1$  på begge sider af ligningen, dvs. vi ganger igennem med matricen  $\mathbf{K}_1^{-1}$  og får derved isoleret den ønskede matrix  $\mathbf{K}$ , der deformerer  $\boxtimes_1$  til det nye tetraeder  $\boxtimes_2$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{bmatrix}^{-1} \quad . \quad (5.6)$$

|||| **Bemærkning 5.1** Læg mærke til, at matricen  $\mathbf{K}_1$  selv er en deformationsmatrix, nemlig den der deformerer basistetraederet  $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  til det givne tetraeder  $\boxtimes_1$  (pånær parallelforskydning af fodpunktet), og at matricen  $\mathbf{K}_2$  tilsvarende selv er den deformationsmatrix, der deformerer basistetraederet til det andet givne tetraeder  $\boxtimes_2$ . Deformationsmatricen  $\mathbf{K}$  er selv regulær med determinant forskellig fra 0. Hvorfor det?

Deformationsmatricen  $\mathbf{K}$  har en SVD-dekomposition i 4 faktorer som udviklet i kapitel 4. Specielt får vi de tre  $\sigma_i$ -værdier for  $\mathbf{K}$  som jo er kvadratrødderne af egenverdierne for følgende matrix:

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = (\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1})^* \cdot (\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1}) \quad . \quad (5.7)$$

De tidligere omtalte fabrikker  $M_P$  og  $M_Q$ , der kan deformere basistrekanten og basistetraedre til andre ønskede trekanten i planen og tilsvarende deformere tetraedre i rummet, kan ligeledes håndtere vilkårligt givne tetraedre  $\boxtimes_1$  som input og deformere dem til ønskede tetraedre  $\boxtimes_2$  som output ved brug af matricen  $\mathbf{K}$  som fundet ovenfor.

Priserne er igen givet ved henholdsvis  $P(\mathbf{K})$  og  $Q(\mathbf{K})$ , hvor  $\mathbf{K}$  nu selvsagt er den aktuelle deformationsmatrix, bestemt ovenfor i (5.4), altså  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1}$ . Bemærk, at rotationer og paralleltransporter er helt gratis, hvilket måske er en anelse urealistisk.

### Eksempel 5.2

Vi vil finde prisen  $P(\mathbf{K})$  på den deformation som deformerer  $\boxtimes_1$  til det nye tetraeder  $\boxtimes_2$ , når de to tetraedre er givet ved:

$$\begin{aligned}\boxtimes_1 &= \boxtimes(O, (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1)) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(O, (-1, 0, 3\sqrt{2}), (0, 0, 3\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2))\end{aligned}\quad (5.8)$$

Det gøres via følgende udregninger:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}/2 & 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 13/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}$$

$$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = (9, 4, 1) = \text{egenværdierne for } \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K}$$

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1)^2 + (1 - \sigma_2)^2 + (1 - \sigma_3)^2 = 5$$

### OPGAVE 5.3

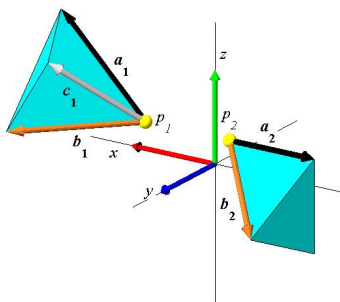
Find de deformationsmatricer  $\mathbf{K}$ , som i de enkelte tilfælde nedenfor afbilder det givne tetraeder  $\mathfrak{T}_1$  i det andet givne tetraeder  $\mathfrak{T}_2$ , idet det stadig underforstås, at afbildningen er bestemt ved, at det først givne treben afbildes på det andet givne treben.

i)  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  ,  $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}(O, (1, 1, 1), (0, 2, -1), (1, 0, 3))$

ii)  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(O, (1, 1, 1), (0, 2, -1), (1, 0, 3))$  ,  $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$

iii)  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(O, (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1))$  ,  $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}(O, (0, 0, 2), (0, 1, 0), (3, 0, 0))$

iv)  $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}(O, (2, 1, 3), (1, -1, 1), (3, 1, 1))$  ,  $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}(O, (1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$  .



Figur 5.2: Et tetraeder før og efter deformation,  $\mathfrak{T}_1$  og  $\mathfrak{T}_2$ .

### OPGAVE 5.4

Find i hvert af tilfældene i opgave 5.3 værdierne af  $\sigma_i$  for hver af de fundne deformationsmatricer, og angiv priserne  $P$  og  $Q$  for de enkelte deformationer.

### OPGAVE 5.5

Antag at  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$  er to givne tetraedre med samme fodpunkt for de udspændende treben. Hvis  $\mathbf{K}$  deformerer  $\boxtimes_1$  til  $\boxtimes_2$ , så deformerer  $\boxtimes_2$  tilbage til  $\boxtimes_1$  med deformationsmatricen  $\mathbf{K}^{-1}$ . Hvorfor det?

### OPGAVE 5.6

Hvis  $\mathbf{K}$  har  $\sigma_i$ -værdierne  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$ , så er  $\sigma_i$ -værdierne for  $\mathbf{K}^{-1}$  følgende:  $1/\sigma_3 \geq 1/\sigma_2 \geq 1/\sigma_1$ . Hvorfor det?

### OPGAVE 5.7

Find to eksempler (altså to par af tetraedre  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$ ), der viser, at prisen  $P$  på deformation af  $\boxtimes_1$  til  $\boxtimes_2$  ikke nødvendigvis er den samme som prisen på deformationen den anden vej, altså fra  $\boxtimes_2$  til  $\boxtimes_1$  for to givne tetraedre.

### OPGAVE 5.8

Fabrikkens direktør vil gerne tilbyde en prissætning, der er symmetrisk, dvs. således at deformation fra  $\boxtimes_1$  til  $\boxtimes_2$  koster det samme (stadig udtrykt ved en anden simpel funktion af  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , og  $\sigma_3$ ) som den omvendte deformation fra  $\boxtimes_2$  til  $\boxtimes_1$ . Har du et forslag?

## 5.2 Markerede og u-markerede tetraedre

Både i kapitel 4 og i ovenstående afsnit har tetraedrene  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$  været givet ved et treben, altså f.eks. de tre kant-vektorer  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{b}_1$ , og  $\mathbf{c}_1$  ud fra det fælles fodpunkt  $p_1$ , der netop optræder i den anvendte notation  $\boxtimes = \boxtimes_1(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$ .

Men for et givet tetraeder er der som allerede nævnt flere muligheder for at repræsentere dette tetraeder ved et treben, helt præcist er der 24 muligheder. Der er dels valget af fodpunkt og dels rækkefølgen af kantvektorerne. Hvis vi har valgt et af disse treben til at repræsentere tetraederet, så vil vi sige, at tetraederet er markeret med dette fodpunkt og de valgte kantvektorer. Hidtil har vi kun betragtet **markerede tetraedre**.

For hvert valg af markering (altså udspændende treben) for givne tetraedre  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$  findes en entydig bestemt deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  med entydigt givne  $\sigma_i$  værdier som vist ovenfor. Men hvilke(t) valg giver den mindste pris?

### OPGAVE 5.9

Overvej dette spørgsmål og giv et passende simpelt eksempel der viser, at prisen afhænger af valg af markering (treben) for hver af de to givne tetraedre. Vink: Det er ikke nødvendigt at undersøge alle  $24^2$  tilfælde af mulige markeringer. Ét eksempel er nok.

## 5.3 Deformation af trekanter i rummet

Trekanten i rummet deformerer også ved matrix-operationer. For to givne **markerede trekanter**  $\triangle_1 = \triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$  og  $\triangle_2 = \triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$  er der mange matricer, der deformerer den ene trekant over i den anden.

Men vi kan vælge én af dem på en passende smart måde: Vi betragter trekanten  $\triangle_1$  som sideflade i et tetraeder  $\boxtimes_1 = \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$ , hvor det ekstra ben  $\mathbf{c}_1$  simpelthen defineres ved krydsproduktet af de to kantvektorer i den givne trekant:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} . \quad (5.10)$$

Tilsvarende vil vi betragte trekanten  $\triangle_2$  som sideflade i det tetraeder  $\boxtimes_2 = \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ , hvor det ekstra ben  $\mathbf{c}_2$  defineres ved:

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} . \quad (5.11)$$

### OPGAVE 5.10

Vis, at hvis  $\triangle_1$  og  $\triangle_2$  er regulære, så er de ovenfor konstruerede tetraedre  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$  ligeledes regulære.

Metoderne i afsnit 5.1 benyttes nu til at finde den entydigt bestemte deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  og en paralleltransport-vektor  $\mathbf{k}$  som tilsammen deformerer  $\boxtimes_1$  til  $\boxtimes_2$ , altså den matrix og den vektor der giver

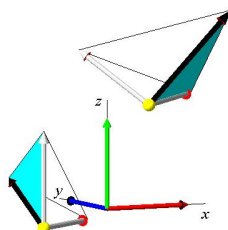
$$\boxtimes_2 = \mathbf{K} \boxtimes_1 + \mathbf{k} , \quad \text{sådan at} \quad (5.12)$$

$$\boxtimes \left( p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} \right) = \mathbf{K} \boxtimes \left( p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} \right) + \mathbf{k} .$$

Da de respektive rumlige trekanter  $\triangle_1$  og  $\triangle_2$  er sideflader i de to tetraedre følger de så at sige med tetraederdeformationen og må derfor opfylde den samme identitet med *den samme deformationsmatrix*  $\mathbf{K}$  som tetraederne selv, nemlig (5.12) ovenfor:

$$\triangle_2 = \mathbf{K} \triangle_1 + \mathbf{k} , \quad \text{dvs.} \quad (5.13)$$

$$\triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = \mathbf{K} \triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \mathbf{k} .$$



Figur 5.3: To rumlige trekanter er hver for sig hængt op på deres respektive "tetraeder-stativer", hvor det tredje ben er det normerede krydsprodukt af trekants-hængslets to kant-vektorer.

Mindst én af de tre  $\sigma_i$ -værdier for  $3 \times 3$ -deformationsmatricen  $\mathbf{K}$  vil nødvendigvis have værdien 1 når  $\mathbf{K}$  konstrueres på denne måde. Hvorfor det? De to andre  $\sigma_i$ -værdier 'hører til' selve trekant-deformationen og bestemmer dermed prisen på den rumlige deformation af  $\Delta_1$  til  $\Delta_2$ .

### Eksempel 5.11

Vi betragter to markerede rumlige trekanter  $\Delta_1$  og  $\Delta_2$  og vil finde en  $3 \times 3$ -deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  og en parallelforskydningsvektor  $\mathbf{k}$  der deformerer  $\Delta_1$  til  $\Delta_2$ . De to trekanter er givet og markeret ved deres respektive hængsler:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \Delta(O, (1, 1, 1), (1, 0, 1)) \\ \Delta_2 &= \Delta((1, 1, 1), (0, 2, \sqrt{2}), (0, 0, \sqrt{2}))\end{aligned}\quad (5.14)$$

Vi aflæser direkte den nødvendige translationsvektor:  $\mathbf{k} = (1, 1, 1)$ . For at finde  $\mathbf{K}$  beregner vi først de to ekstra ben til tetraeder-ophænget:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2) \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} = (1, 0, 0)\end{aligned}\quad (5.15)$$

Dermed har vi til bestemmelse af den tilhørende  $3 \times 3$ -deformation  $\mathbf{K}$  præcis som i afsnit 5.1:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{K}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{K}^* \cdot \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = (4, 1, 1)$  = egenverdierne for  $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$

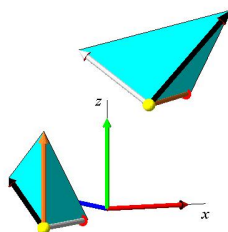
$$P(\mathbf{K}) = 1 \quad , \quad Q(\mathbf{K}) = \frac{9}{4} \quad (\text{kun } \sigma\text{-værdien } 2 \text{ bidrager til prisen}).$$

### OPGAVE 5.12

En markeret rumlig trekant  $\Delta_1$  ønskes deformeret til en anden markeret rumlig trekant  $\Delta_2$ . Bestem i hvert af nedenstående tilfælde en  $3 \times 3$ -deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  og en parallelforskydningsvektor  $\mathbf{k}$  som kan bruges til formålet, idet markeringerne ønskes respekteret:

$$\begin{aligned} i) \quad \Delta_1 &= \Delta(O, (1, 1, 1), (1, 1, -1)) \quad , \quad \Delta_2 = \Delta((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)) \\ ii) \quad \Delta_1 &= \Delta(O, (4, 2, 1), (1, 2, 4)) \quad , \quad \Delta_2 = \Delta((7, 2, 7), (1, 0, 1), (0, 1, 0)) \\ iii) \quad \Delta_1 &= \Delta((12, 1, 0), (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (1, 0, 0)) \quad , \quad \Delta_2 = \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}) \\ iv) \quad \Delta_1 &= \Delta((1, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 1, 3)) \quad , \quad \Delta_2 = \Delta(O, (1, 2, 3), (1, 1, 1)) \quad . \end{aligned} \quad (5.17)$$





Figur 5.4: De to tetraedre udspændt af trebenene i figur 5.3.

### OPGAVE 5.13

Bestem priserne på hver enkelt af deformationerne i opgave 5.12, idet de oprindelige standardpris-sætninger  $P$  og  $Q$  benyttes. Numeriske beregninger med et passende antal decimaler er tilstrækkelige.

### OPGAVE 5.14

Et markeret tetraeder  $\boxtimes_1 = \boxtimes((1,2,3), (1,0,1), (-1,0,0), (0,1,1))$  deformeres til et andet markeret tetraeder  $\boxtimes_2 = \boxtimes((0,0,0), (1,0,1), (-1,1,0), (1,0,-1))$  ved hjælp af en  $3 \times 3$ -deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  og en parallelforskydningsvektor  $\mathbf{k}$  således at  $\boxtimes_2 = \mathbf{K}\boxtimes_1 + \mathbf{k}$ .

1. Angiv orienteringen (positiv eller negativ) af hver af tetraedrene  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$  henholdsvis.
2. Bestem rumfanget af hver af tetraedrene  $\boxtimes_1$  og  $\boxtimes_2$ .
3. Bestem  $\mathbf{K}$  og  $\mathbf{k}$ .
4. Beskriv, hvordan forholdet mellem tetraedrenes rumfang kan findes direkte ud fra  $\mathbf{K}$ .

### OPGAVE 5.15

En markeret rumlig trekant  $\triangle_1 = \triangle((1,2,3), (0,0,1), (-1,0,0))$  ønskes deformeret til en anden markeret rumlig trekant  $\triangle_2 = \triangle((3,2,1), (1,0,1), (-1,1,0))$  ved hjælp af en  $3 \times 3$ -deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  og en parallelforskydningsvektor  $\mathbf{k}$  således at  $\triangle_2 = \mathbf{K}\triangle_1 + \mathbf{k}$ . Bestem  $\mathbf{K}$  og  $\mathbf{k}$ .

## ||| OPGAVE 5.16

En 3D deformationsmatrix  $\mathbf{K}(t)$  er til ethvert tidspunkt  $t > 0$  givet ved:

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

En deformation af standard-tetraederet er dernæst givet ved

$$\boxtimes(t) = \mathbf{K}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad (5.19)$$

1. Bestem for enhver værdi af  $t > 0$  en SVD dekomposition for matricen  $\mathbf{K}(t)$ .
2. Bestem rumfanget af  $\boxtimes(t)$  som funktion af tiden  $t > 0$ .
3. Bestem prisen (i henhold til standard-prissætningerne  $P$  og  $Q$ ) for  $\boxtimes(t)$  for enhver værdi af  $t > 0$ .

## ||| Kapitel 6

# Geometrisk dynamik i 2D

## 6.1 Tidsparametriserede plane kurver

Et punkt  $p$  der bevæger sig i planen har til ethvert tidspunkt  $t$  et sæt koordinater med hensyn til det fast valgte koordinatsystem  $\{O, x, y\}$ :

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t)), t \in I, \quad (6.1)$$

hvor  $I$  betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet.



Stedvektoren fra  $O$  til punktet  $p(t)$  betegnes naturligvis med vektor-notation således:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t)), t \in I, \quad (6.2)$$

### ||| Eksempel 6.1

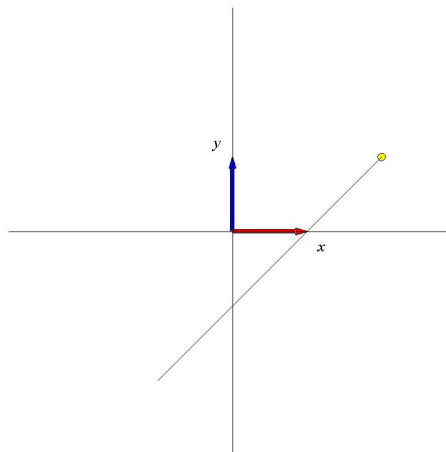
Et meget simpelt eksempel på en sådan bevægelse af et punkt i planen er vist (og animeret) i figur 6.1, hvor

$$p = p(t) = (3t - 1, 3t - 2), t \in [0, 1]. \quad (6.3)$$

### ||| OPGAVE 6.2

En cirkel  $C$  i planen er bestemt ved at radius er 3 og centrum ligger i punktet  $(2, 1)$ . Bestem en tidsparametrisering  $p = p(t) = (p_1(t), p_2(t))$  af cirklen med tilhørende tidsinterval  $I$  således at punktet  $p(t)$  gennemløber cirklen netop én gang. Se figur 6.2.

Vi kan nu bevæge en markeret trekant i planen således at det valgte hængsel for trekanten har fodpunkt i det bevægede punkt  $p(t)$  - for eksempel den simple punkt-bevægelse i eksempel 6.1 og således at hængslets kant-vektorer er givne vektor-funktioner af tiden  $t$ .



Figur 6.1: Bevægelse af et punkt langs en ret linje.

### Eksempel 6.3

Vi vælger fodpunktet  $p(t)$  og derudover konstante kantvektorer, henholdsvis  $\mathbf{i} = (1, 0)$  og  $\mathbf{j} = (0, 1)$ , se animationen i figur 6.3. I dette konkrete eksempel er trekanten altså givet ved det tidsafhængige hængsel:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t) = \Delta(p(t), \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ &= \Delta((3t - 1, 3t - 2), (1, 0), (0, 1)) \quad . \end{aligned} \quad (6.4)$$

## 6.2 Samtidig bevægelse og deformation af trekant

### Eksempel 6.4

Vi bruger den samme bevægelse af fodpunktet  $p = p(t)$  som i ovenstående eksempler. Men nu deformerer vi basistrekanten med en **tidsafhængig deformationsmatrix**, der til ethvert givet tidspunkt  $t \in [0, 1]$  har nedenstående ret simple SVD-faktoriserings. I første omgang antager vi, at begge faktorerne  $\mathbf{V}$  og  $\widehat{\mathbf{F}}$  er konstante, nemlig enhedsmatricen:  $\mathbf{V} = \widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$ . (I eksempel 6.7 ser vi på en noget mere generel situation, hvor  $\mathbf{V}$  ikke er helt så trivielt.)

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \Sigma(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad (6.5)$$

Figur 6.2: Bevægelse af et punkt langs en cirkel som i opgave 8.1 .

hvor

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 2\pi t \\ \sigma_1(t) &= 1+t \\ \sigma_2(t) &= 1 - \frac{t}{2} .\end{aligned}\tag{6.6}$$

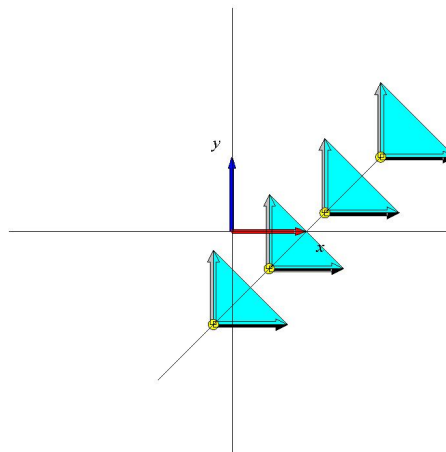
Så er

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} (1+t)\cos(2\pi t) & -(1-\frac{t}{2})\sin(2\pi t) \\ (1+t)\sin(2\pi t) & (1-\frac{t}{2})\cos(2\pi t) \end{bmatrix} , \quad t \in [0,1] .\tag{6.7}$$

Det vil sige, at det **dynamiske hængsel** til tidspunktet  $t$  har fodpunktet  $p(t)$  og kantvektorerne  $\mathbf{a}(t)$  og  $\mathbf{b}(t)$  bestemt ved:

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \mathbf{K}(t) \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t) = \Delta(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) , \quad t \in [0,1] \\ p(t) &= (3t-1, 3t-2) \\ \mathbf{a}(t) &= ((1+t)\cos(2\pi t), (1+t)\sin(2\pi t)) \\ \mathbf{b}(t) &= (-(1-\frac{t}{2})\sin(2\pi t), (1-\frac{t}{2})\cos(2\pi t)) .\end{aligned}\tag{6.8}$$

Se animation af hængselbevægelsen og deformationen i figur 6.4. Bemærk ved inspektion af animationen, at begge kantvektorer udfører en hel rotation i løbet af bevægelsen fra det ene endepunkt af linjestykket til det andet, samt at kantvektorerne under hele bevægelsen er vinkelrette på hinanden. Dette følger ligeledes direkte af udtrykkene for  $\mathbf{a}(t)$  og  $\mathbf{b}(t)$  i (6.8).



Figur 6.3: Bevægelse af trekant *uden rotation og skalering* 'langs' et linjestykke - det samme som i figur 6.1. Animeret.

### ||| OPGAVE 6.5

Bestem arealet  $\text{Areal}(\triangle(t))$  af trekanten  $\triangle(t)$  i ovenstående eksempel, dvs. ved hjælp af oplysningerne i (6.8), som funktion af tiden  $t \in [0, 1]$ .

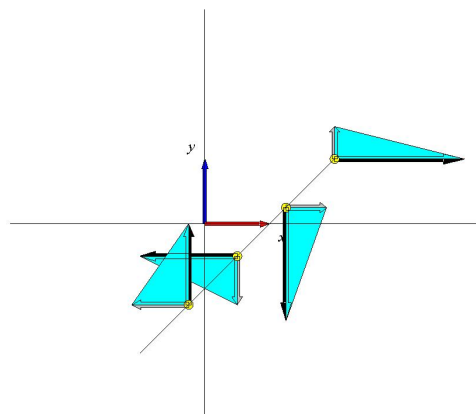
### ||| Eksempel 6.6

I figur 6.5 ses den bevægelse af hængslet som vi opnår, hvis vi undlader at bruge faktoren  $\Sigma(t)$  i ovenstående eksempel (eller erstatter  $\Sigma(t)$  med  $\mathbf{E}$ ), dvs. hvis vi benytter rotationsmatricen  $\mathbf{U}(t)$  som deformationsmatrix på basis-trekanten. Derved fås en roterende bevægelse af de vinkelrette enheds-kantvektorer, nemlig den rotation, som er givet direkte ved rotationsmatricen  $\mathbf{U}(t)$ . I dette tilfælde har vi altså:

$$\begin{aligned}\triangle(t) &= \triangle(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) \\ p(t) &= (3t - 1, 3t - 2) \\ \mathbf{a}(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ \mathbf{b}(t) &= (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)) \quad .\end{aligned}\tag{6.9}$$

Vi er nu klar til at se på et mere generelt eksempel, hvor  $\mathbf{K}(t)$  har 3 ikke-trivielle SVD faktorer.

### ||| Eksempel 6.7



Figur 6.4: Bevægelse af dynamisk deformeret trekant 'langs' det linjestykke, der er vist i figur 6.1. Animeret. Se eksempel 6.4.

Vi antager, at  $\mathbf{K}(t)$  har en ikke-triviel faktor  $\mathbf{V}^*(t)$ , nemlig følgende tidsafhængige rotationsmatrix:

$$\mathbf{V}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

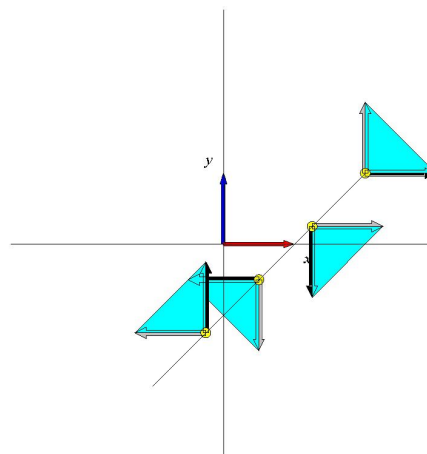
sådan at  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{\Sigma}(t) \mathbf{V}^*(t)$  for  $t \in [0, 1]$ , hvor  $\mathbf{U}(t)$  og  $\mathbf{\Sigma}(t)$  er de samme matricer som brugt i ovenstående eksempel 6.4. Den bevægede og deformede trekant  $\Delta(t) = \mathbf{K}(t) \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t)$  er animeret i figur 6.6.

### ||| OPGAVE 6.8

Bestem  $\text{Areal}(\Delta(t))$  af trekanten  $\Delta(t) = \mathbf{K}(t) \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t)$ , som betragtes i ovenstående eksempel 6.7, idet arealet udtrykkes som en funktion af tiden  $t \in [0, 1]$ .

## 6.3 Det medfølgende hængsel

Ligesom i eksempel 6.6 kan vi undersøge den bevægelse af basis-hængslet, som fås ved at benytte rotationsmatricen  $\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$ , dvs. uden at skalere med  $\mathbf{\Sigma}(t)$  undervejs. Derved fås et **medfølgende hængsel** som det ses på animationen i figur 6.7. Den situation svarer til eksempel 6.6.



Figur 6.5: Bevægelse af trekant med rotationsmatricen  $\mathbf{U}(t)$  'langs' linjestykket i figur 6.1. Animeret. Se eksempel 6.6.

Hvis vi forestiller os, at vi følger med i bevægelsen og sidder fast på den trekant, der er udspændt af det medfølgende roterede hængsel, hvordan vil vi så opleve deformationen af det hængsel, der deformerer af  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$ ? Det er vist i animationen i figur 6.8. Det fornemmes ved inspektion af filmen, at der netop ikke foregår nogen koordineret rotation (af den trekant, der bliver deformeret) set fra det medfølgende hængsel - kun skaleringer - til ethvert givet tidspunkt.

### ||| OPGAVE 6.9

Bestem (standard-)prisen  $P(t) = P(\mathbf{K}(t))$  for hver af de markerede trekanter  $\Delta(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , i eksempel 6.7.

### ||| OPGAVE 6.10

En kunde beder (den nu velkendte) fabrik  $M_P$  om at producere en ordre på 1000 trekanter  $\Delta(t_i)$  af den type, der bruges i eksempel 6.7, nemlig én for hver  $t_i = i/1000$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 1000$ . Direktøren giver et hurtigt tilbud på, hvad det skal koste:

$$P_{\text{total}} = 1000 \int_0^1 P(t) dt \quad , \quad (6.11)$$

hvor  $P(t)$  er den funktion, der er fundet i opgave 6.9 ovenfor. Er det et godt tilbud (for kunden)?



Figur 6.6: Bevægelse af basis-trekant med  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$  som givet i eksempel 6.7. Animeret.

I figur 6.9 er vist én periode af en periodisk bevægelse og deformation af en trekant.

### ||| OPGAVE 6.11

Til konstruktion af trekantene  $\Delta(t)$  i figur 6.9 er benyttet følgende ingredienser:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \mathbf{K}(t) \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) + \mathbf{p}(t) \\ p(t) &= \left(0, 3 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{K}(t) &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha \cdot \sin(t)) & \cos(\alpha \cdot \sin(t)) \\ -\sin(\alpha \cdot \sin(t)) & -\sin(\alpha \cdot \sin(t)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

hvor  $\alpha$  betegner en konstant. Hvilken konstant er der tale om?

## 6.4 Sweeping ind i rummet

Hvis vi betragter alle (eller faktisk kun 80 af) trekantene i hele familien af deformationer fra eksempel 6.7 får vi overdækket det område i planen, som er vist i figur 6.10.

Hvis vi i stedet **stakker** trekantene fra eksempel 6.7 i  $z$ -aksens retning, og erstatter fodpunktskurven med  $p(t) = (0, 0, 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , så får vi konstrueret et tårn, som vist i figur 6.11.

Figur 6.7: Bevægelse af basis-trekanten med  $\mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$ . Animeret. Se eksempel 6.7.

### ||| OPGAVE 6.12

Bestem volumenet af tårnet i figur 6.11. Vink: Man kan med stor fordel benytte den 'snitmetode', som vi benyttede til beregning af rumfanget af tetraedre i kapitel 3, jvf. sætning 3.5.

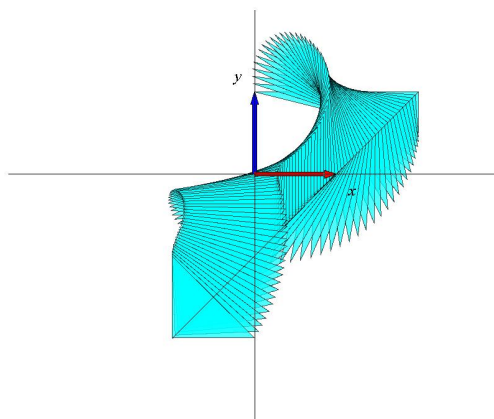
Som referencer til ovenstående tårnkonstruktion, se figur 6.13 og kapitel 13 i [Po].

### ||| OPGAVE 6.13

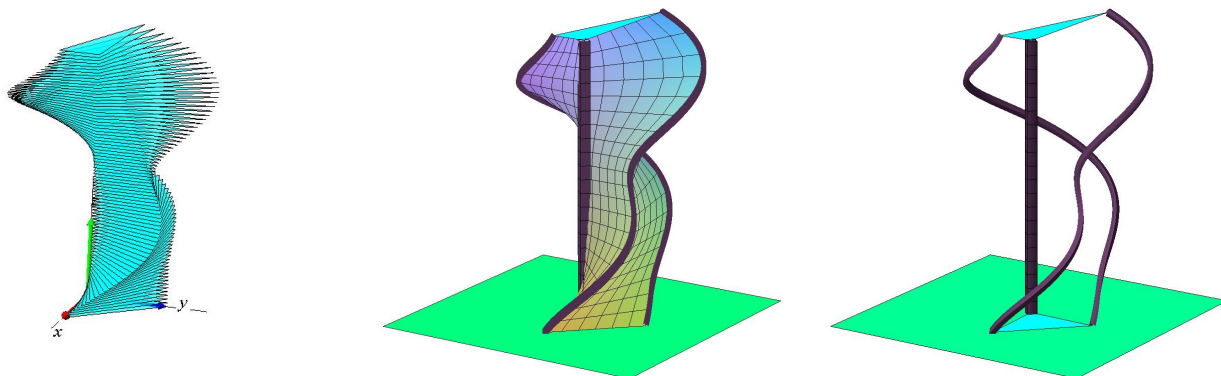
Bestem volumenet af den tårnkonstruktion som opnås ved at stakke trekanterne fra eksempel 6.7 i  $z$ -aksens retning, men nu ved at benytte fodpunktskurven  $p(t) = (3 \cos(t\pi), 3 \sin(t\pi), 3t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Figur 6.8: Bevægelsen af basis-trekanten som den ses fra det medfølgende hængsel. Animeret.

Figur 6.9: Jump. Animeret.



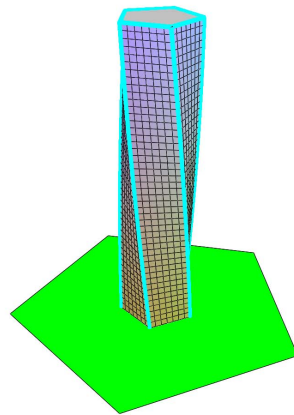
Figur 6.10: Det område i planen, som 'fejdes ud' med de trekanter  $\triangle(t)$ , der fremkommer ved familien af deformationer i eksempel 6.7.



Figur 6.11: Det område i rummet, som 'konstrueres' med trekantene  $\Delta(t)$  fra eksempel 6.7, idet fodpunktet for hængslerne nu bevæges langs  $z$ -aksen og trekantene (be-)holdes vandrette, altså parallelle med  $(x, y)$ -planen.



Figur 6.12: Turning Torso Towers. I Malmö og Toronto, henholdsvis.



Figur 6.13: Turning Torso Tower modellering.



## ||| Kapitel 7

# Geometrisk dynamik i 3D

Som antyd det i forrige kapitel 6 kan enhver  $2 \times 2$ -deformationsmatrix  $\mathbf{K}$  essentielt skrives som et produkt af symmetrisk matrix og en rotationsmatrix (som definerer et medfølgende hængsel).

Det samme gælder for  $3 \times 3$ -deformationsmatricer. Vi begynder dette kapitel med at formulere præcis hvad det resultat går ud på. Det er indholdet af følgende sætning om **polær dekomposition**:

||| **Sætning 7.1** Enhver regulær matrix  $\mathbf{K}$  kan skrives som et produkt

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad , \quad (7.1)$$

hvor  $\mathbf{R}$  er en rotationsmatrix,  $\mathbf{S}$  er en symmetrisk matrix med positive egenværdier, og  $\widehat{\mathbf{F}}$  er flipmatricen (der som bekendt afhænger af om  $\det(\mathbf{K})$  er positiv eller negativ).

Rotationsmatricen  $\mathbf{R}$  og den symmetriske matrix  $\mathbf{S}$  kan selv faktoriseres og dekomponeres på følgende måde:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^* \quad (7.2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \quad ,$$

hvor  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ , og  $\mathbf{\Sigma}$  er de velkendte matricer fra SVD faktoriseringen af  $\mathbf{K}$ , se nedenfor.



Læg mærke til at den sætning specielt betyder, at hvis  $\mathbf{K}$  har positiv determinant (altså  $\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{E}$ ) og hvis  $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{E}$  (altså  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ), så er  $\mathbf{S} = \mathbf{E}$  og dermed  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ , dvs.  $\mathbf{K}$  er selv en rotationsmatrix.

*Bevis.* Det er let at bevise Sætning 7.1 når vi har SVD faktoriseringen af  $\mathbf{K}$  til rådighed.

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \widehat{\mathbf{F}} \quad . \quad (7.3)$$

Vi skriver simpelthen SVD faktoriseringen således - ved at indsætte en ekstra (enheds-)faktor  $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}$  strategisk mellem  $\mathbf{U}$  og  $\mathbf{\Sigma}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \hat{\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{U} \cdot (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \hat{\mathbf{F}} \\ &= (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*) \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*) \cdot \hat{\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad , \end{aligned} \tag{7.4}$$

hvor  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}^*$  er produkt af to rotationsmatricer og derfor selv en rotationsmatrix (hvorfor det?) Vi mangler blot at vise, at  $\mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*$  er en symmetrisk matrix. Men det følger af at:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* &= (\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^*)^* \\ &= \mathbf{V}^{**} \cdot \mathbf{\Sigma}^* \cdot \mathbf{V}^* \\ &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^* \\ &= \mathbf{S} \quad , \end{aligned} \tag{7.5}$$

hvor vi har benyttet, at der klart gælder  $\mathbf{\Sigma}^* = \mathbf{\Sigma}$  og  $\mathbf{V}^{**} = \mathbf{V}$ . □

### ||| OPGAVE 7.2

Bestem polære dekompositioner for hver af følgende deformationsmatricer (nummereringen stammer fra den tidligere opgave 4.19, som handlede om SVD faktoriseringen af disse matricer):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{7.6}$$



## 7.1 Samtidig bevægelse og deformation af tetraeder

Vi vil nu se på hvad ovenstående polære dekomposition betyder for en generel tidsafhængig deformation og bevægelse af et tetraeder i rummet - på samme måde som vi diskuterede dette for samtidig bevægelse og deformation af trekanter i planen i forrige kapitel.

Et (fod)punkt  $p$  for et tetraeder bevæger sig altså nu i rummet og har til ethvert tidspunkt  $t$  et sæt koordinater med hensyn til det gode gamle fast valgte koordinatsystem  $\{O, x, y, z\}$ :

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)), \quad t \in I, \quad (7.7)$$

hvor  $I$  betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet - sædvanligvis, når ikke andet er nævnt, vil vi bruge  $I = \mathbb{R}$ .

### OPGAVE 7.3

Bestem en tidsparametrisering  $p(t)$ ,  $t \in I$ , af den cirkel  $C$  i rummet, som har centrum i  $(1, 0, 0)$ , radius 3, og som ligger i den plan igennem centret som står vinkelret på vektoren  $(1, 1, 1)$ . Vælg  $I$  sådan at cirklen gennemløbes netop én gang.

### Eksempel 7.4

Et eksempel er vist med fodpunkts-kurven i figur 7.1. Den viste (animerede) bevægelse er simpelthen givet ved:

$$p(t) = (-1 + 3t, -2 + 3t, 0), \quad \text{hvor } t \in [0, 1]. \quad (7.8)$$

I den samme figur er vist en ikke-trivielt animeret deformation af et tetraeder. Læg mærke til, at det er selve tetraederdeformationen der stadig er det interessante - ikke selve fodpunkts-bevægelsen. (Det forhold vil ændre sig dramatisk i næste kapitel, hvor vi vil koble deformationen til fodpunktsbevægelsen og styre deformationen af tetraederet blandt andet ved hjælp af banekurven for fodpunkts-bevægelsen.)

Den viste deformation af tetraederet er givet ved følgende fuldstændige specifikation af det markerede treben:

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)) \\ &= \mathbf{K}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t), \quad \text{hvor } t \in [0, 1] \text{ og} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$p(t) = (-1 + 3t, -2 + 3t, 0), \quad \text{og kantvektorerne er givet ved}$$

$$[\mathbf{a}^*(t) \mathbf{b}^*(t) \mathbf{c}^*(t)] = \mathbf{K}(t),$$

hvor

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{\Sigma}(t) \cdot \mathbf{V}^*(t)$$

$$\mathbf{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+(t/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(t/2) \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

og

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_z(2\pi t) \cdot \mathbf{R}_y(2\pi t) \cdot \mathbf{R}_x(2\pi t)$$

$$\mathbf{V}^*(t) = \mathbf{R}_z(-\pi t) \cdot \mathbf{R}_y(-\pi t) \cdot \mathbf{R}_x(-\pi t) \quad . \quad (7.11)$$

Det fremgår (også af animationen), at selv om deformationsmatricen har et rimeligt simpelt udtryk, så er bevægelsen langt fra simpel. Det skyldes udelukkende de involverede rotationer. Selve strækningen og kompressionen af tetraederet fra start til slut er bestemt af  $\sigma_i(t)$ -værdierne i  $\mathbf{\Sigma}(t)$  og de kan jo direkte aflæses, sådan at vi for eksempel umiddelbart kan løse følgende typiske opgaver:

### ||| OPGAVE 7.5

Bestem til ethvert tidspunkt  $t \in [0, 1]$  volumenet  $\text{Vol}(\boxtimes(t))$  af det tetraeder som er defineret i (7.9).

### ||| OPGAVE 7.6

Hvis vi benytter standard-prissætningen for tetraedre på fabrikken  $M_P$ , hvor meget koster det så at få lavet følgende stak bestående af 1000 tetraedre som er produceret efter forskriften fra eksempel 7.4), se ligning (7.9):  $\boxtimes(t_i)$ ,  $t_i = i/1000$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 1000$ .

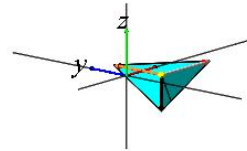
Hvis vi ikke roterer, det vil sige hvis vi kun benytter  $\mathbf{S}(t)$ -delen af den polære dekomposition for  $\mathbf{K}(t)$ , så får vi den deformation af tetraederet som er vist i figur 7.2.

Det er stadigvæk rotationerne i rummet og altså rotationsdelen  $\mathbf{R}(t)$  af de polære dekompositioner, det er sværest at forstå - så dem vil vi dyrke lidt nærmere i det følgende.

## 7.2 Differentiation af tidsafhængig rotationsmatrix

For at forstå hvordan rotationer og rotationsmatricer  $\mathbf{R}(t)$  udvikler sig og virker i rummet, er det nødvendigt at undersøge og finde simple udtryk for deres tids-afledede  $\mathbf{R}'(t)$ . Hvis den tidsafhængige  $3 \times 3$ -rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  er givet ved sine element-funktioner således:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$



Figur 7.1: Deformation af tetraeder med  $\mathbf{K}(t)$  som specificeret i eksempel 7.4, se de definerende ligninger (7.9). Animeret.

så er  $\mathbf{R}'(t)$  defineret ved de  $t$ -afledede af de enkelte element-funktioner  $r_{ij}(t)$  sådan her:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} . \quad (7.13)$$

Da vi antager, at  $\mathbf{R}(t)$  er rotationsmatricer for enhver værdi af  $t \in \mathbb{R}$ , så gælder der per definition 4.5, dels at  $\det(\mathbf{R}(t)) = 1$  for alle  $t$  og dels at

$$\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t) . \quad (7.14)$$

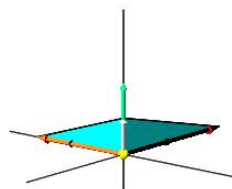
Så gælder derfor også for alle  $t$  at

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \mathbf{E} . \quad (7.15)$$

Den ligning kan vi differentiere med hensyn til  $t$  og får så, da  $\mathbf{E}$  er en konstant matrix:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)) = \mathbf{O} , \quad \text{dvs.} \quad (7.16)$$

$$\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'^*(t) = \mathbf{O} .$$



Figur 7.2: Deformation af basistetraederet med den symmetriske matrix  $\mathbf{S}(t)$  fra den polære dekomposition af  $\mathbf{K}(t)$  fra eksempel 7.4. Animeret.

### OPGAVE 7.7

Vis - eller giv et selvvalgt ikke-trivielt eksempel, der viser - at de to ligninger i ovenstående ligning (7.16) er ækvivalente, altså at man kan finde den **afledede af et matrix-produkt** med 'den sædvanlige produkt-metode', som kendes for funktioner:  $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ . Vink: Kig eventuelt først på  $2 \times 2$ -matricer  $\mathbf{A}(t)$ .

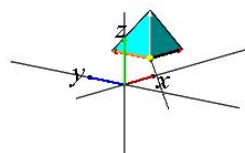
Det vil sige, at der for rotationsmatricerne  $\mathbf{R}(t)$  altid gælder:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) &= -\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}'^*(t) \\ &= -(\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t))^* \end{aligned} \quad (7.17)$$

## 7.3 Skævsymmetriske matricer

Ligningen (7.17) ovenfor betyder, at matricen  $\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t)$  er *skævsymmetrisk* for enhver værdi af  $t$  i følgende forstand:

||| **Definition 7.8** En matrix  $\mathbf{A}$  er skævsymmetrisk hvis  $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$  .



Figur 7.3: Rotation med rotationsmatricen  $\mathbf{R}(t)$  fra den polære dekomposition af  $\mathbf{K}(t)$  fra eksempel 7.4. Animeret.

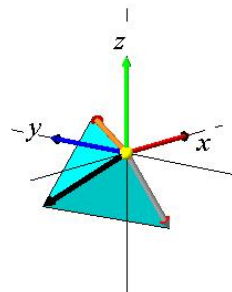
### OPGAVE 7.9

Vis, at en given  $3 \times 3$ -matrix  $\mathbf{\Omega}$  er skævsymmetrisk hvis og kun hvis der findes 3 tal  $\alpha$ ,  $\beta$ , og  $\gamma$ , således at

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} . \quad (7.18)$$

#### 7.3.1 Akse-vektorer og akse-matricer

Skævsymmetriske  $3 \times 3$ -matricer er altså – efter opgave 7.9 – ret simple i den forstand, at de kan beskrives ved tre elementer. Og tre elementer er jo netop også tilstrækkelige og nødvendige til beskrivelse af en vektor i rummet. Følgende sætning er derfor ikke så overraskende (vi vil igen formulere sætningen med  $\mathbf{\Omega}$ , fordi vi især skal bruge sætningen for de skævsymmetriske matricer  $\mathbf{\Omega}(t)$ , som vi fandt ovenfor i forbindelse med undersøgelsen af tidsafhængige rotationer  $\mathbf{R}(t)$ ) :



Figur 7.4: Rotationen af tetraederet i 7.3 med fast fodpunkt i Origo. Animeret.

||| **Sætning 7.10** Lad  $\Omega$  være en vilkårlig given skævsymmetrisk  $3 \times 3$ -matrix. Så findes der en entydigt bestemt vektor  $\omega$ , således at

$$\Omega \mathbf{v}^* = (\omega \times \mathbf{v})^* \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \quad (7.19)$$

og den vektor  $\omega$  er simpelthen givet ved de tre elementer fra  $\Omega$  som er markeret i opgave 7.9 ovenfor:

$$\omega = (\alpha, \beta, \gamma) = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21}) \quad . \quad (7.20)$$

*Bevis.* Vi skal bare vise, at den påståede vektor  $\omega$  har den ønskede egenskab og at det er den eneste vektor med den egenskab. Men det følger af de direkte udregninger:

$$(\omega \times \mathbf{v})^* = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

og

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \quad . \quad (7.22)$$

Altså samme resultat for alle  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Det vil sige, at den anviste vektor  $\boldsymbol{\omega}$  faktisk opfylder (7.19). Vi mangler så kun at vise, at det er den eneste vektor der kan bruges. Hvis  $\boldsymbol{\eta}$  er en anden vektor med den samme egenskab som  $\boldsymbol{\omega}$ , altså at den også opfylder (7.19), så er specielt også

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{v})^* &= \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}^* - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}^* = \mathbf{0}^* \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \quad \text{dvs.} \\ (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

og *det* er kun muligt for  $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$  (hvorfor det?), så  $\boldsymbol{\eta}$  kan ikke være *en anden* vektor end  $\boldsymbol{\omega}$ , og det var det, vi skulle vise.  $\square$

**Definition 7.11** Hvis  $\boldsymbol{\Omega}$  er en vilkårlig givet skævsymmetrisk  $3 \times 3$ -matrix med de 9 elementer  $\Omega_{ij}$ , så kalder vi

$$\boldsymbol{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$$

den til  $\boldsymbol{\Omega}$  **associerede akse-vektor**.

Den omvendte sætning gælder også:

**Sætning 7.12** Lad  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  være en vilkårlig givet vektor i rummet. Så findes der en entydigt bestemt skævsymmetrisk matrix  $\boldsymbol{\Omega}$ , således at

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})^* = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}^* \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \quad (7.24)$$

og den matrix  $\boldsymbol{\Omega}$  er givet ved de tre elementer fra  $\boldsymbol{\omega}$  således

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

*Bevis.* Ligesom for sætning 7.10.  $\square$

**Definition 7.13** Hvis  $\boldsymbol{\omega}$  er en vilkårlig given vektor med koordinaterne  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , så kalder vi

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

den til  $\boldsymbol{\omega}$  **associerede akse-matrix**.

### OPGAVE 7.14

En skævsymmetrisk matrix  $\Omega$  har følgende kendte elementer:

$$\Omega_{12} = 3 \quad , \quad \Omega_{13} = -4 \quad , \quad \Omega_{23} = 1 \quad . \quad (7.26)$$

Bestem den til  $\Omega$  associerede aksevektor.

### OPGAVE 7.15

En given vektor  $\omega$  har egenskaberne:

$$\omega \times (1, 1, 0) = (-3, 3, -1) \quad , \quad \omega \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1) \quad . \quad (7.27)$$

Bestem den til  $\omega$  associerede aksematrix.

## 7.4 Tidsafhængige rotationsmatricer

Som allerede udviklet ovenfor får vi skævsymmetriske matricer serveret en masse ved til ethvert tidspunkt at danne en ganske bestemt produktmatrix ud fra en given tidsafhængig rotationsmatrix

$$\Omega(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \quad , \quad (7.28)$$

Lad os begynde med de simpleste rotationer, koordinat-akse-rotationerne, som vi først stiftede bekendtskab med i 4.18.

### OPGAVE 7.16

Lad  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$  som defineret i 4.18. (Bemærk, at vi har udskiftet den uafhængige variable  $w$  med tiden  $t$ .) Dvs.

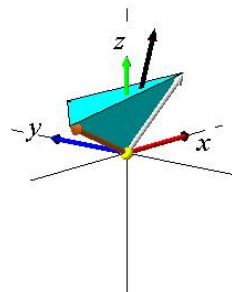
$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (7.29)$$

Bestem for enhver værdi af  $t$  den skævsymmetriske matrix  $\Omega(t)$  efter forskriften 7.28, og bestem dernæst den til  $\Omega(t)$  associerede aksevektor  $\omega(t)$  for ethvert tidspunkt  $t$ .

### OPGAVE 7.17

Samme opgave som ovenfor, men nu for de to andre elementar-rotationer, henholdsvis  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_x(t)$  og  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(t)$ .





Figur 7.5: Rotationen af tetraederet i 7.3 med tilhørende antydet akse-vektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Animeret.

### OPGAVE 7.18

Lad  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t))$ , hvor  $\theta(t)$  er en givet funktion af  $t$ , altså

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

Bestem  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  og den associerede aksevektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Vink: Det kan være en god idé først at bestemme  $\boldsymbol{\omega}(t)$  for et specielt, konkret, valg af vinkelfunktion  $\theta(t)$ , for eksempel  $\theta(t) = 7t$ .

### OPGAVE 7.19

Lad  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(\pi/4) \cdot \mathbf{R}_x(t)$ . Bestem  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  og den associerede aksevektor-funktion  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

#### 7.4.1 Rotationer med given akse-vektor-funktion

Hvis vi har fået givet en vektorfunktion  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , kan vi så finde en rotation  $\mathbf{R}(t)$  der har  $\boldsymbol{\omega}(t)$  som aksevektor til ethvert tidspunkt  $t$ ? Det er ikke svært, vi skal jo 'bare' finde  $\mathbf{R}(t)$ , således at

$$\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \quad , \quad (7.31)$$

hvor  $\mathbf{\Omega}(t)$  er den aksematrix, der til tidspunktet  $t$  har  $\boldsymbol{\omega}(t)$  som associeret aksevektor. Ligningen er ækvivalent med følgende matrix-differentialligning, idet vi jo stadig har at  $\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$ :

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \quad . \quad (7.32)$$

Det vil sige, vi skal bestemme  $\mathbf{R}(t)$  sådan at følgende ligning er opfyldt:

$$\mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}(t)$$

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} ,$$

hvor vi har brugt definition 7.13 og indsat de kendte koordinatfunktioner for  $\boldsymbol{\omega}(t)$  i aksematricen.

Det vil sige, at hver søjle i  $\mathbf{R}(t)$  skal opfylde det samme differentiaalligningssystem bestående af 3 koblede lineære ligninger med 3 ubekendte funktioner:

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) \\ r'_{21}(t) \\ r'_{31}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}(t) \\ r_{21}(t) \\ r_{31}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r'_{12}(t) \\ r'_{22}(t) \\ r'_{32}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12}(t) \\ r_{22}(t) \\ r_{32}(t) \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

$$\begin{bmatrix} r'_{13}(t) \\ r'_{23}(t) \\ r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13}(t) \\ r_{23}(t) \\ r_{33}(t) \end{bmatrix} .$$

Hver søjle i  $\mathbf{R}(t)$  tilfredsstiller altså *et og samme* differentiaalligningssystem, dvs. de har *fælles* systemmatrix  $\mathbf{\Omega}(t)$ .

Hvis vi derfor kalder de tilsvarende vektorer - svarende til koordinatsøjlerne i  $\mathbf{R}(t)$  - henholdsvis  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$ , således at

$$\mathbf{R}(t) = [ \mathbf{e}^*(t) \quad \mathbf{f}^*(t) \quad \mathbf{g}^*(t) ] \quad , \quad (7.34)$$

så er (7.33) ækvivalent med:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^*(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{e}^*(t) \\ \mathbf{f}'^*(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{f}^*(t) \\ \mathbf{g}'^*(t) &= \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{g}^*(t) \quad , \end{aligned} \quad (7.35)$$

Hvis vi skriver de 3 ligninger på kompakt form, så får vi netop den ligning vi startede med, ligning (7.32):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'^*(t) & \mathbf{f}'^*(t) & \mathbf{g}'^*(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{R}'(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \quad ,$$

så pengene passer!

Men ved at indføre vektorerne  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$  kan vi skrive ligningerne i (7.35) ved hjælp af den til  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  associerede akse-vektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (7.37)$$

Der er altså flere forskellige måder at udtrykke differentialligningerne på, når vi skal finde  $\mathbf{R}(t)$  med en given akse-vektor-funktion  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Lad os se på et første simpelt eksempel:

### ||| Eksempel 7.20

Lad  $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, 2)$  for alle  $t \in \mathbb{R}$  og antag, at  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ . Vi vil finde den rotation  $\mathbf{R}(t)$ , som hører til rotations-akse-vektor-funktionen  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , og som tilfredsstiller den givne begyndelsesbetingelse. Den første vektor-differentialligning i (7.37) kan vi skrive således:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= (0, 0, 2) \times \mathbf{e}(t) \\ (e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)) &= (0, 0, 2) \times (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) \\ (e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)) &= (-2e_2(t), 2e_1(t), 0) \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\begin{bmatrix} e'_1(t) \\ e'_2(t) \\ e'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} .$$

Det system har løsningerne (den fuldstændige løsningsmængde):

$$\begin{aligned} e_3(t) &= c_3 \\ e_1(t) &= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ e_2(t) &= -c_2 \cos(2t) + c_1 \sin(2t) \end{aligned} \quad (7.39)$$

hvor  $c_1$ ,  $c_2$ , og  $c_3$  er vilkårlige (arbitrære) konstanter. De konstanter fastlægges via begyndelsesbetingelserne til tiden  $t = 0$ , som for den første søjle-vektor  $\mathbf{e}(0)$  i  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$  er følgende:  $e_3(0) = 0$ , så  $c_3 = 0$ ;  $e_1(0) = 1$ , så  $c_1 = 1$ ; den sidste betingelse,  $e_2(0) = 0$  giver endelig  $c_2 = 0$ .

Løsningen for vektorfunktionen  $\mathbf{e}(t)$  er derfor:

$$\mathbf{e}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0) \quad (7.40)$$

Tilsvarende kan den samme fuldstændige løsning fra (7.39) benyttes til bestemmelse af  $\mathbf{f}(t)$  og  $\mathbf{g}(t)$ . Det er kun begyndelsesbetingelserne, der er forskellige. Resultaterne er:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= (-\sin(2t), \cos(2t), 0) \\ \mathbf{g}(t) &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (7.41)$$

således at den søgte rotation  $\mathbf{R}(t)$  er:

$$\mathbf{R}(t) = [\mathbf{e}^*(t) \quad \mathbf{f}^*(t) \quad \mathbf{g}^*(t)] = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

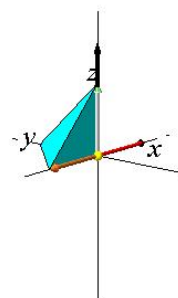
### OPGAVE 7.21

Eftervis ved direkte udregning, at den fundne løsning i eksempel 7.20 ovenfor faktisk er en løsning, både til differentialligningssystemet  $\mathbf{R}'(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \mathbf{R}(t)$  og til begyndelsesværdi-kravet:  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ .

### OPGAVE 7.22

Bestem på samme måde som i eksempel 7.20 de rotationer  $\mathbf{R}(t)$  som giver nedenstående akse-vektorfunktioner  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , idet det igen antages, at  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (1, 1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (0, 0, t^2) \end{aligned} \quad (7.43)$$



Figur 7.6: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion  $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, 2 \sin(t))$ . Animeret.

### Eksempel 7.23

Hvis vi lader  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, (\pi/2) \sin(t))$  og  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$  fås ved løsning af differentiaalligningssystemerne ovenfor den rotation, som ses i figur 7.6. Akse-vektor-funktionen er også vist der. Løsningen er givet ved:

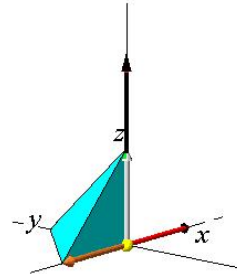
$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi \cos(t)/2) & -\cos(\pi \cos(t)/2) & 0 \\ \cos(\pi \cos(t)/2) & \sin(\pi \cos(t)/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.44)$$

### OPGAVE 7.24

Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.23, ligning (7.44), er korrekt.

### Eksempel 7.25

Hvis vi lader  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 2 \sin^2(t))$  og  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ , så får vi (ved numerisk løsning af differentiaalligningssystemerne ovenfor) den rotation, som er vist i figur 7.7.



Figur 7.7: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion  $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, 2\sin^2(t))$ . Animeret.

### Eksempel 7.26

Rotations-akse-vektoren  $\boldsymbol{\omega} = (\cos(t), \sin(t), 1)$  og  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$  er benyttet i figur 7.8. Rotations-løsningen er:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}. \quad (7.45)$$

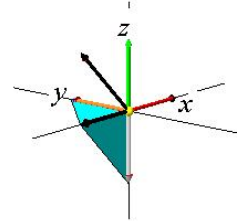
### OPGAVE 7.27

Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.26, ligning (7.45), er korrekt.

## 7.5 Outlook

Med de værktøjer, vi nu har kridtet banen op med, er vi parate til at undersøge, hvordan punkterne inde i et tetraeder  $\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t))$  bevæger sig, når selve tetraederet fremkommer ved rotation af et basistetraeder med en rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$ , samtidig med at fodpunktet bevæges via en given forskrift  $p(t)$ .

For eksempel kan vi som en første naturlig opgave undersøge bevægelsen af et hjørnepunkt i tetraederet, for eksempel det hjørnepunkt  $q(t)$ , der er spidspunkt for  $\mathbf{a}(t)$  når vi benytter  $p(t)$  som



Figur 7.8: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion  $\boldsymbol{\omega}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$ . Animeret.

fodpunkt for  $\mathbf{a}(t)$ . Hvis vi kalder stedvektoren til  $p(t)$  for  $\mathbf{p}(t)$ , så er stedvektoren til  $q(t)$  givet ved:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{p}(t) \quad . \quad (7.46)$$

### ||| Eksempel 7.28

Hvis vi betragter den konkrete rotation af basistetraedet, som stammer fra den polære dekomposition af  $\mathbf{K}(t)$  i eksempel 7.4, dvs. den rotation, der er vist i figur 7.3, så er banekurven for  $q(t)$  den kurve, der er vist i figur 7.9.

I et følgende kapitel vil vi blandt andet undersøge farten og retningen af bevægelsen af punktet  $q(t)$ , altså hastighedsvektoren for bevægelsen af punktet til ethvert tidspunkt  $t$ .

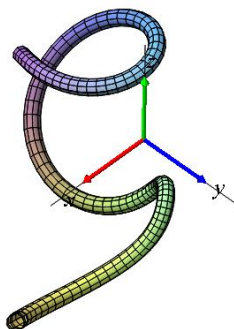
Bemærk, at farten og retningen af bevægelsen af fodpunktet  $p(t)$  er direkte givet ved den tidsafledede af stedvektoren til  $p(t)$ :

$$\mathbf{p}'(t) = (p'_1(t), p'_2(t), p'_3(t)) \quad , \quad (7.47)$$

og helt tilsvarende har vi fra 7.46

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad . \quad (7.48)$$

Da  $\mathbf{a}(t)$  er fremkommet ved at gange  $\mathbf{R}(t)$  på koordinatsøjlen for den første kantvektor i basistetraederet, altså for basisvektoren  $\mathbf{i}$ , så er koordinatsøjlen for  $\mathbf{a}(t)$  præcis den første søjle i  $\mathbf{R}(t)$ .



Figur 7.9: Baneurve for hjørnepunkt i det roterede tetraeder i figur 7.3

Vektoren  $\mathbf{a}(t)$  er altså (når vi betragter rotationer) den vektor, som vi har kaldt  $\mathbf{e}(t)$  i ligning 7.34. Det vil sige, at

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{e}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \quad (7.49)$$

men så har vi jo fra ligning (7.37), at

$$\mathbf{q}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \quad (7.50)$$

hvor  $\boldsymbol{\omega}(t)$  er den til rotationen  $\mathbf{R}(t)$  associerede akse-vektor-funktion. Tilsvarende udtryk etableres lige så let for hastighederne af bevægelsen af de to resterende hjørnepunkter i tetraederet.



## ||| Kapitel 8

# Styring langs krumme kurver

I dette kapitel vil vi som lovet se nærmere på, hvordan vi kan benytte fodpunktskurven  $p(t)$  og fodpunktskurvens geometriske egenskaber, såsom krumning og torsion (der defineres nedenfor), til at kontrollere og styre bevægelserne af tetraedrene i rummet. Selve styringen af tetraederne beskrives først til allersidst – i afsnit 8.6.

## 8.1 Tids-parametriserede regulære kurver

Vi repeterer lidt fra kapitel 7: Et punkt  $p$  der **bevæger sig** i rummet har til ethvert tidspunkt  $t$  et sæt koordinater med hensyn til det fast valgte koordinatsystem  $\{O, x, y, z\}$ :

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)), t \in I \quad , \quad (8.1)$$

hvor  $I$  betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet, f.eks.  $I = [a, b]$ , og hvor  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$  og  $p_3(t)$  er 3 funktioner af  $t$ . Vi vil typisk antage, at disse tre **koordinatfunktioner** er glatte funktioner, dvs. de kan differentieres et vilkårligt antal gange.

**Stedvektoren** fra  $O$  til punktet  $p(t)$  betegnes naturligvis med **vektor-notation** som følger, idet koordinaterne for stedvektoren opløst efter basisvektorerne  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  netop er de samme som  $(x, y, z)$ -koordinaterne for  $p(t)$ . Derved får vi **(sted)-vektor-funktionen**  $\mathbf{p}(t)$  til beskrivelse af bevægelsen langs kurven:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)), t \in I \quad . \quad (8.2)$$

### ||| OPGAVE 8.1

En cirkel  $C$  i  $(x, y)$ -planen er bestemt ved at cirkelns radius er 3 og cirkelns centrum ligger i punktet  $(2, 1, 0)$ . Bestem en tidsparametrisering  $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), 0)$  af cirklen med tilhørende tidsinterval  $I$  således at punktet  $p(t)$  (dvs. spidspunktet af  $\mathbf{p}(t)$ ) gennemløber cirklen netop én gang.

Figur 8.1: Simpel konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet. Animeret.

Figur 8.2: Singulær og selv-overlappende konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet, den samme linje som i figur 8.1. Animeret.

||| **Definition 8.2** En parameterfremstilling  $\mathbf{p}(t)$ ,  $t \in I$ , af en kurve er en **regulær parameterfremstilling** hvis

$$\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0} \quad , \quad \text{for alle } t \in I \quad . \quad (8.3)$$

Parameterfremstillingen er tilsvarende **singulær** for  $t = t_0 \in I$  hvis  $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$ .

### ||| OPGAVE 8.3

I figurerne 8.2 og 8.3 markerer de røde punkter singulære punkter for den anvendte og animerede parameterfremstilling. Konstruér singulære parameterfremstillinger af den viste rette linje, sådan at de singulære punkter for dine parameterfremstillinger optræder netop i de viste punkter.



En given kurve har uendelig mange meget forskellige parameterfremstillinger. Selv om en given kurve (f.eks. en ret linje) har en regulær parameterfremstilling, så behøver ikke alle parameterfremstillinger af den samme kurve at være regulære.

Figur 8.3: Singulær men *ikke* overlappende konstruktion af – og bevægelse på – en ret linje i rummet, den samme linje som i figurerne 8.1 og 8.2. Animeret.



Nogle kurver, som f.eks. **asteroiden**,  $\mathbf{p}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 0)$  som er vist i figur 8.4, har ikke nogen som helst parameterfremstilling, der er regulær overalt. Se f.eks. <http://en.wikipedia.org/wiki/Astroid>.

Figur 8.4: Konstruktion af – og bevægelse på – en asteroidekurve (i  $(x,y)$ -planen). Denne parametrisering har 4 singulære punkter. Enhver parametrisering har mindst disse 4 **singulære punkter**. Animeret.

## 8.2 Buelængde-parametriserede kurver

Med henblik på at gøre analysen meget lettere vil vi nedenfor ofte antage, hvor det er muligt, at de kurver vi betragter, er parametriserede på en sådan måde, at **farten** er konstant 1, dvs. at **hastighedsvektoren**  $\mathbf{p}'(t)$  har konstant længde 1. Den antagelse kan vi udtrykke på forskellige

måder:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{p}'(t)\| &= 1 \\
 \|(p'_1(t), p'_2(t), p'_3(t))\| &= 1 \\
 \sqrt{p_1'^2(t) + p_2'^2(t) + p_3'^2(t)} &= 1 \\
 \sqrt{v_1^2(t) + v_2^2(t) + v_3^2(t)} &= 1 \\
 \|(v_1(t), v_2(t), v_3(t))\| &= 1 \\
 \|\mathbf{v}(t)\| &= 1 \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{8.4}$$

hvor vi også har indført og brugt betegnelsen  $\mathbf{v}(t)$  for hastighedsvektoren ( $\mathbf{v}$  for **velocity**)  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}'(t)$ .

### ||| OPGAVE 8.4

Hvilke af følgende kurver, som er angivet ved stedvektor-funktionerne  $\mathbf{p}(t)$ , har konstant fart 1? Alle tidsintervaller er hele den reelle talakse  $\mathbb{R}$ .

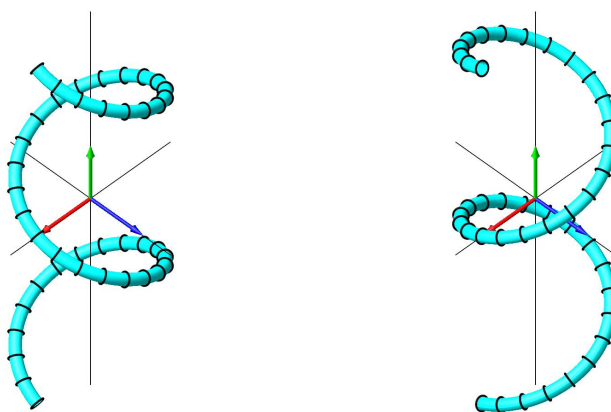
$$\begin{aligned}
 i) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, 1, t) \\
 ii) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, t, t^2) \\
 iii) \quad \mathbf{p}(t) &= (t, t^2, t^3) \\
 iv) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, \cos(t), \sin(t)) \\
 v) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, 2\cos(t), 2\sin(t)) \\
 vi) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, \cos(2t), \sin(2t)) \\
 vii) \quad \mathbf{p}(t) &= (t, \cos(t), \sin(t)) \\
 viii) \quad \mathbf{p}(t) &= \left( \frac{4}{5} \cos(t), 1 - \sin(t), -\frac{3}{5} \cos(t) \right) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{8.5}$$

### ||| OPGAVE 8.5

En kurve - en såkaldt **helix** eller **vindellinje** - er givet som følger, hvor  $a$  og  $b$  betegner to konstanter, der ikke begge er 0:

$$\mathbf{p}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.
 \tag{8.6}$$

1. Tegn (eller plot) selv kurven for forskellige valg af  $a$  og  $b$ . Se eksempler i figurene 8.5 og 8.6.
2. Forklar, hvorfor det er rimeligt, at den ene kurve i figur 8.5 kaldes **højreskruet** og den anden **venstreskruet**.
3. Undersøg hvilke værdier for  $a$  og  $b$  der giver højreskrunding og hvilke der giver venstreskrunding. Prøv evt. først med  $(a, b) = (1, 1)$ ,  $(a, b) = (1, -1)$ ,  $(a, b) = (-1, 1)$ ,  $(a, b) = (-1, -1)$ .
4. Find for enhver værdi af  $a$  og  $b$  farten  $\|\mathbf{p}'(t)\|$  af den tilhørende bevægelse langs kurven udtrykt ved  $a$  og  $b$  når bevægelsesforskriften er den ovenfor givne  $\mathbf{p}(t)$ .



Figur 8.5: En venstreskruet og en højreskruet helix.

Figur 8.6: Konstruktion af – og bevægelse på – vindellinjer. Vindellinjen til højre er venstreskruet med lille 'pitch' (dvs. den højde som punktet løftes ved én omgang) og forholdsvis høj konstant fart. Animeret.

### 8.2.1 Hvordan omparametriseres til buelængde?

Regulære kurver kan **omparametriseres** til buelængde-parametrisering:

|||| **Sætning 8.6** En given regulær kurve  $\mathbf{p}(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$ , med  $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$  for alle  $t \in I$  omparametriseres ved hjælp af funktionen  $S(t)$  som er givet ved:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{p}'(u)\| du \quad \text{for alle } t \in [a, b] \quad , \quad (8.7)$$

hvor  $t_0 \in [a, b]$  er et fast valgt startpunkt ( $t_0$  behøver ikke at være  $a$ ) for integrationen.

Funktionen  $S(t)$  er en voksende glat funktion på hele  $t$ -intervallet  $[a, b]$ , så der findes en omvendt funktion  $T(s)$  som ligeledes er en voksende glat funktion på hele det tilsvarende  $s$ -interval  $S(I) = [S(a), S(b)] = [\alpha, \beta]$ .

Den omparametriserede kurve  $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$  har farten  $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$  for alle  $s \in [\alpha, \beta]$ .

Den omparametriserede kurve  $\boldsymbol{\eta}(s)$  er dermed **buelængdeparametriseret** fordi  $s$  måler præcis **buelængden med fortegn** af kurvestykket fra punktet  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}(T(0)) = \boldsymbol{\eta}(0)$  til punktet  $\mathbf{p}(T(s)) = \boldsymbol{\eta}(s)$  på kurven. Fortegnet på  $s$  afgøres af om punktet  $\boldsymbol{\eta}(s)$  ligger før (så er  $s < 0$ ) eller efter (så er  $s > 0$ ) startpunktet  $\boldsymbol{\eta}(0)$  på kurven.

Længden af det stykke af kurven der ligger mellem punktet  $\mathbf{p}(T(s_1)) = \boldsymbol{\eta}(s_1)$  og punktet  $\mathbf{p}(T(s_2)) = \boldsymbol{\eta}(s_2)$  er derfor  $L = |s_2 - s_1|$ . Dette gør det naturligvis igen rimeligt at sige, at  $\boldsymbol{\eta}(s)$  buelængdeparametriseret.

### ||| Bevis

Funktionen  $S(t)$  er en voksende funktion: Det følger af, at  $S'(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$  på hele  $t$ -intervallet  $[a, b]$ . Da  $T(s)$  er defineret til at være den omvendte funktion af  $S(t)$  har vi per den definition:  $T(S(t)) = t$  for alle  $t \in [a, b]$  og  $S(T(s)) = s$  for alle  $s \in [\alpha, \beta]$ . Specielt har vi derfor også (fra kædereglen eller direkte fra differentiationsreglen for omvendte funktioner):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(S(t)) &= 1 \\ S'(t) \cdot T'(s) &= 1 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Vi kan nu bruge det til at vise, at farten af  $\boldsymbol{\eta}(s)$  er 1, altså at  $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$  for alle  $s \in [\alpha, \beta]$ :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}'(s)\| &= \left\| \frac{d}{ds}\boldsymbol{\eta}(s) \right\| \\ &= \left\| \frac{d}{ds}\mathbf{p}(T(s)) \right\| \\ &= |T'(s)| \cdot \left\| \frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) \Big|_{t=T(s)} \right\| \\ &= |T'(s)| \cdot \|\mathbf{p}'(t) \Big|_{t=T(s)}\| \\ &= |T'(s) \cdot S'(t)| \\ &= 1 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Og heraf følger dernæst endelig, at længden af det stykke af kurven der ligger mellem punktet  $\mathbf{p}(T(s_1)) = \boldsymbol{\eta}(s_1)$  og punktet  $\mathbf{p}(T(s_2)) = \boldsymbol{\eta}(s_2)$  er derfor  $L = |s_2 - s_1|$ . Vi har nemlig:

$$\begin{aligned} L &= \left| \int_{s_1}^{s_2} \|\boldsymbol{\eta}'(s)\| ds \right| \\ &= \left| \int_{s_1}^{s_2} 1 ds \right| \\ &= |s_2 - s_1| \end{aligned} \quad (8.10)$$



Sætning 8.6 kan tolkes således: Hvis det er muligt at køre på en vej uden at stoppe op (men med tilladte accelerationer og decelerationer), så er det også muligt at køre med konstant fart på den samme vej hele vejen fra den ene ende til den anden. Hvis farten er konstant 1 så kan man aflæse tiden på kilometertælleren og man kan aflæse det kørte antal kilometer på sit stopur. (Hvorfor og hvordan?)



Det er ikke muligt at køre på asteroiden uden at stoppe op mindst i de 4 singulære punkter, som er fremhævet i figur 8.4.

### Eksempel 8.7

Vi ser på en simpel tidsparametriseret regulær kurve  $\mathbf{p}(t)$  og omparametriserer den på følgende måde:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (3t - 1, 3t - 2, 0), \quad t \in [0, 1] \\ \mathbf{p}'(t) &= (3, 3, 0) \\ \|\mathbf{p}'(t)\| &= 3\sqrt{2} \\ S(t) &= \int_{t_0=0}^t 3\sqrt{2} \, du, \quad \text{ved valg af integrationsstart i } t_0 = 0 \\ S(t) &= 3\sqrt{2}t \\ T(s) &= \frac{s}{3\sqrt{2}}, \quad \text{den omvendte funktion},\end{aligned}\tag{8.11}$$

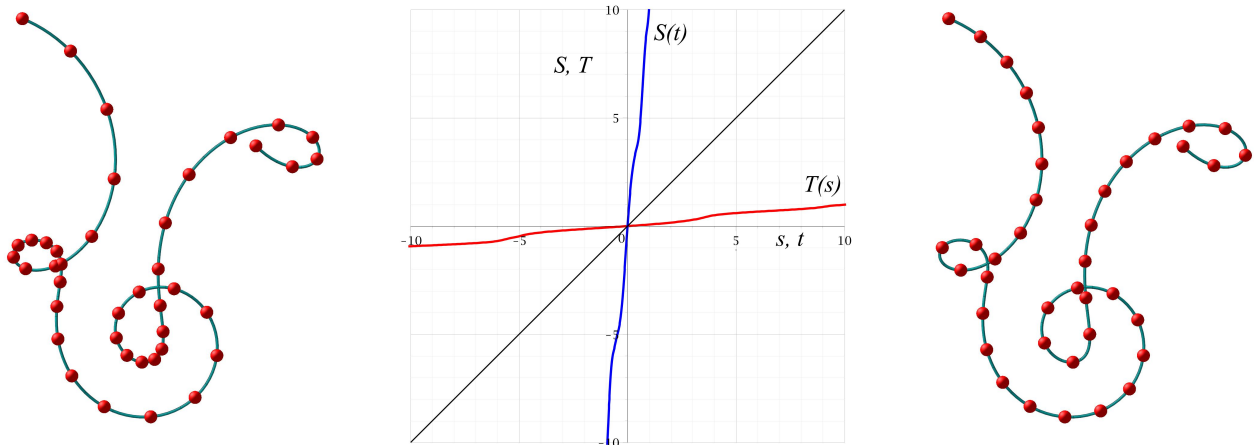
således at vi nu får den buelængde parametriserede kurve ved at indsætte  $T(s)$  på  $t$ -pladsen i  $\mathbf{p}(t)$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(s) &= \mathbf{p}(T(s)) = (3T(s) - 1, 3T(s) - 2, 0), \quad s \in [S(0), S(1)] = [0, 3\sqrt{2}] \\ \boldsymbol{\eta}(s) &= \left( \frac{s}{\sqrt{2}} - 1, \frac{s}{\sqrt{2}} - 2, 0 \right), \quad s \in [0, 3\sqrt{2}].\end{aligned}\tag{8.12}$$

Det kan være umuligt at finde både funktionen  $S(t)$  og den omvendte funktion  $T(s)$  udtrykt ved sædvanlige funktionstegn. Begge funktionerne kan dog approksimeres vilkårligt godt f.eks. med spline funktioner.

### OPGAVE 8.8

Se Maple's kommando [Spline] via Maple pakken [`> with(CurveFitting);`]. Find ud af, hvordan [Spline] kommandoen kan benyttes til at finde vilkårligt gode approksimationer til begge funktionerne  $S(t)$  og  $T(s)$  ud fra en passende valgte sekvenser af punkter på grafen for  $S(t)$ .



Figur 8.7: En plan kurve  $\mathbf{p}(t)$  med tids-parametriseret markering til venstre og buelængde-parametriseret markering  $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$  til højre. I midten: Funktionerne  $S(t)$  og  $T(s)$  for kurven. Bemærk, at her er  $T(0) = S(0)$  og derfor  $\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{p}(0)$ .

### OPGAVE 8.9

Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne følgende  $t$ -parametriserede kurve

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (t^3, 0, 0) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \quad (8.13)$$

Vis, at den kurve *ikke* har positiv fart for alle  $t$  (parameterfremstillingen er altså ikke regulær), men at kurven (alligevel) kan omparametriseres til en enhedsfart-parametriseret kurve  $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s)) = (T(s)^3, 0, 0)$ , som dermed er en regulær parametrisering.

### OPGAVE 8.10

Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne følgende halv-cirkel med radius  $a > 0$ :

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (a \cos(t), a \sin(t), 0) \quad , \quad t \in [0, \pi] \quad . \quad (8.14)$$

1. Bestem  $S(t)$  og den omvendte funktion  $T(s)$  sådan at omparametriseringen  $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(T(s))$  giver en parametrisering af halvcirklen med enhedsfart.
2. Angiv et interval for parameteren  $s$  således at  $\boldsymbol{\eta}(s)$  gennemløber præcis samme punktmængde som  $\mathbf{p}(t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , netop én gang.



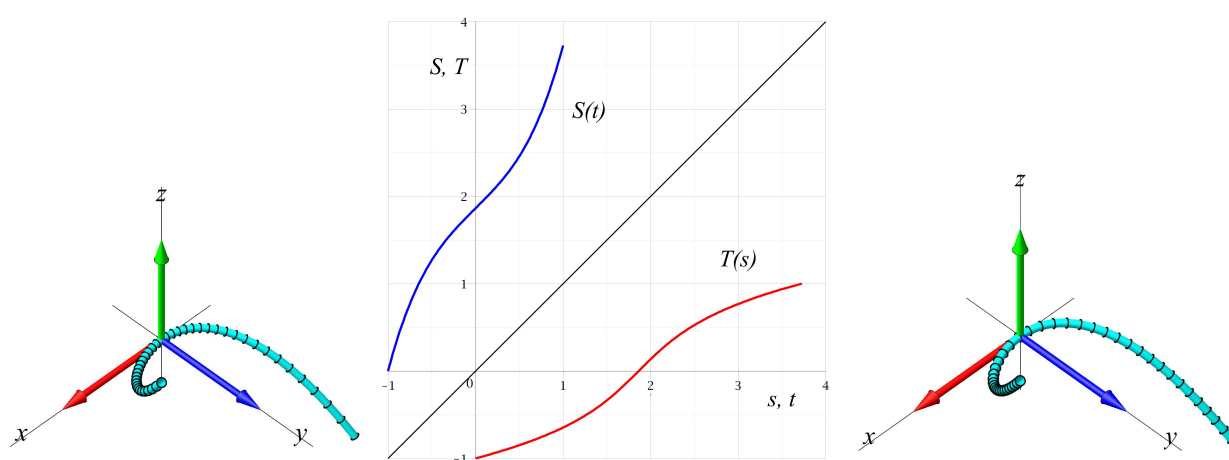
### OPGAVE 8.11

Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne følgende kurve:

$$\mathbf{p}(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad , \quad t \in ]-1, 1[ \quad . \quad (8.15)$$

Tegn (plot) kurven, og vis, at den faktisk allerede er enhedsfart-parametriseret.

Som allerede antydnet: Når en kurve er enhedsfart-parametriseret vil vi ofte bruge notationen  $s$  for parameteren og betegnelsen  $\boldsymbol{\eta}(s)$  for kurven med den parametrisering - eller bemærke eksplicit, om parametriseringen har enhedsfart eller ej.



Figur 8.8: Til venstre: Den  $t$ -parametriserede kurve  $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $t \in [-1, 1]$ . I midten: Funktionerne  $S(t)$  og  $T(s)$  for kurven. Til Højre: Den  $s$ -parametriserede kurve. Sammenlign også med den plane kurve i figur 8.7 hvor forskellen mellem  $t$ -parametrisering og  $s$ -parametrisering er endnu tydeligere.

## 8.3 Krumning og torsion

I de følgende afsnit vil vi definere krumning og torsion for regulære rumkurver. Vi vil i begyndelsen antage, at rumkurven allerede er givet på buelængde-parametriseret form:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad , \quad s \in [\alpha, \beta] \quad . \quad (8.16)$$

Vi ønsker naturligt nok, at krumningen er en funktion af  $s$ , der fortæller hvor meget kurven bøjer i og omkring stedet  $\boldsymbol{\eta}(s)$  og at torsionen er en funktion af  $s$ , der fortæller hvor meget kurven spiralerer i og omkring stedet  $\boldsymbol{\eta}(s)$ . Vi skal altså helst definere krumning sådan at en lille cirkel (med lille radius) har stor krumning og en stor cirkel (med stor radius) har lille krumning. Og vi skal definere torsionen sådan at de tidligere viste helix-vindellinjer har en torsion der på tilsvarende

måde kan beskrive størrelsen af deres spiralering (snoing) samt fortælle, om de er højre- eller venstre-snoede.



Hermed har vi så allerede to naturlige spørgsmål:

1. Hvad er mon torsionen af en cirkel?
2. Hvad er mon krumningen af en vindellinje?

Det finder vi ud af nedenfor.



Hvis kurven ikke er givet på buelængde-parametriseret form, men måske kun råt som en regulær tids-parametriseret rumkurve  $\mathbf{p}(t)$ , så er der to muligheder for at bestemme kurvens krumning og torsion på ethvert sted  $\mathbf{p}(t)$ : Enten omparametriseres kurven til en buelængdeparametriseret form – og så kan formlerne fra dette og de efterfølgende fire afsnit benyttes – eller også bruges formlerne fra afsnit 8.4 direkte ved at regne på  $\mathbf{p}(t)$  og de  $t$ -afledede af  $\mathbf{p}(t)$ . Det er nemlig ikke nødvendigt at omparametrisere først! Grunden til at vi indfører krumning og torsion ved hjælp af den buelængde-parametriserede version af kurven er dels, at det er meget lettere og dels, at den strategi (stort set) allerede viser, at de to funktioner kun afhænger af den regulære kurve selv – betragtet som en organiseret punktmængde i rummet – og ikke af hvilken parametrisering, der benyttes.

### 8.3.1 Krumning

||| **Definition 8.12** For en given buelængde-parametriseret kurve  $\boldsymbol{\eta}(s)$  definerer vi:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) \quad \text{dette er enheds-tangentvektoren til kurven} \\ \kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| \quad \text{dette er definitionen på krumning: længden af accelerationsvektoren} \end{aligned} \quad (8.17)$$

**Krumningen af kurven** på stedet  $\boldsymbol{\eta}(s)$  defineres altså som længden af accelerationsvektoren når kurven er buelængde-parametriseret.

Hvis  $\kappa(s) > 0$  kan vi definere en ny enheds-vektor  $\mathbf{f}(s)$  ved hjælp af accelerationsvektoren  $\boldsymbol{\eta}''(s)$  således:

$$\mathbf{f}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{\eta}''(s) \quad , \quad \text{for } \kappa(s) > 0 \quad , \quad (8.18)$$

og dermed endelig en tredje enhedsvektor  $\mathbf{g}(s)$  ved hjælp af krydsproduktet af  $\mathbf{e}(s)$  og  $\mathbf{f}(s)$ :

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) \quad , \quad \text{for } \kappa(s) > 0 \quad . \quad (8.19)$$

||| **Sætning 8.13** De tre vektorer som udover krumningen  $\kappa(s)$  er defineret ovenfor (for  $\kappa(s) > 0$ ) består af tre **ortogonale enhedsvektorer**,  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ ,  $\mathbf{g}(s)$ .

De udgør derfor for ethvert  $s$  langs kurven en ny basis for vektorer i rummet – enhver vektor i rummet kan opløses på entydig måde efter vektorerne  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ ,  $\mathbf{g}(s)$ . Vi kalder den nye basis **Frenet–Serret basen** for  $\boldsymbol{\eta}(s)$  og betegner den sådan:  $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$ .



Bemærk, at Frenet–Serret basen afhænger af  $s$  og derfor typisk vil ændre sig afhængig af hvor på kurven vi befinder os. Det er illustreret med animationen i figur 8.12.

### ||| OPGAVE 8.14

Bestem krumningen  $\kappa(s)$  (for enhver værdi af  $s$ ) for den allerede enhedsfart-parametriserede kurve:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (3 \cos(s/3), 3 \sin(s/3), 0) \quad , \quad s \in [0, 6\pi] \quad . \quad (8.20)$$

Bestem tilsvarende for enhver værdi af  $s$  de tre Frenet–Serret vektorer  $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$ . Vis, at de tre fundne vektorer i Frenet–Serret basen er ortogonale enhedsvektorer.

### ||| OPGAVE 8.15

Bestem krumningsfunktionen  $\kappa(t)$ , dvs. krumningen som funktion af  $t$ , for den kurve, der har  $t$ -parametriseringen

$$\mathbf{p}(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad , \quad (8.21)$$

hvor  $t \in ]-1, 1[$ . Vink: Se og brug resultatet fra opgave 8.11.

Begrundelsen, beviset, for sætning 8.13 kan ses således:

### ||| Bevis

Vektoren  $\mathbf{e}(s) = \boldsymbol{\eta}'(s)$  er en enhedsvektor fordi den er hastighedsvektoren for den buelængdeparametriserede kurve  $\boldsymbol{\eta}(s)$ . Vektoren  $\mathbf{f}(s) = \boldsymbol{\eta}''(s)/\kappa(s)$  er en enhedsvektor fordi  $\kappa(s)$  netop er længden af  $\boldsymbol{\eta}''(s)$ . Vektorerne  $\mathbf{e}(s)$  og  $\mathbf{f}(s)$  er ortogonale fordi

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{f}(s) &= \left( \frac{1}{\kappa(s)} \right) \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}'(s) \\ &= \left( \frac{1}{2\kappa(s)} \right) \frac{d}{ds} (\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s)) \\ &= \left( \frac{1}{2\kappa(s)} \right) \frac{d}{ds} (1) \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$= 0 \quad .$$

Da  $\mathbf{e}(s)$  og  $\mathbf{f}(s)$  således er ortogonale enhedsvektorer, så er krydsproduktet  $\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s)$  ligeledes en enhedsvektor, der står vinkelret på hver af de to vektorer  $\mathbf{e}(s)$  og  $\mathbf{f}(s)$ . ■

### Eksempel 8.16

Vi lader  $\boldsymbol{\eta}(s)$  betegne følgende kurve - en cirkel med radius  $a > 0$  i  $(x, y)$ -planen - som er parametriseret med enhedsfart:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a), 0) \quad . \quad (8.23)$$

Så har vi følgende ingredienser til bestemmelse af krumningen og til konstruktion af Frenet–Serret basis:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\ \boldsymbol{\eta}''(s) &= \left(-\frac{1}{a} \cos(s/a), -\frac{1}{a} \sin(s/a), 0\right) \\ \kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| = \frac{1}{a} \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{\boldsymbol{\eta}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0, 0, 1) \quad . \end{aligned} \quad (8.24)$$

### 8.3.2 Torsion

Den ovenfor indførte krumning  $\kappa(s)$  er øjensynlig den faktor vi skal gange på  $\mathbf{f}(s)$  for at få  $\mathbf{e}'(s)$  (husk på, at  $\mathbf{e}'(s) = \boldsymbol{\eta}''(s)$ ):

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s) \mathbf{f}(s) \quad . \quad (8.25)$$

Torsionen  $\tau(s)$  optræder på samme måde (pånær fortegnet!):

||| **Definition 8.17** Lad  $\boldsymbol{\eta}(s)$  betegne en buelængdeparametriseret kurve med  $\kappa(s) > 0$  og Frenet–Serret basis  $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$ .

Så definerer vi torsionen  $\tau(s)$  for kurven således:

$$\mathbf{g}'(s) = -\tau(s) \mathbf{f}(s) \quad . \quad (8.26)$$

Det er nok ikke på forhånd klart, at  $\mathbf{g}'(s)$  og  $\mathbf{f}(s)$  altid er proportionale (hvad de jo skal være for at ovenstående definition 8.17 giver mening). Her er et lille argument for det:

### ||| Bevis

Vi skal indse, at  $\mathbf{g}'(s)$  er parallel med  $\mathbf{f}(s)$ . Men det følger af, at  $\mathbf{g}'(s)$  står vinkelret på enhedsvektoren  $\mathbf{e}(s)$  (hvorfor det?) og at  $\mathbf{g}'(s)$  også står vinkelret på  $\mathbf{e}(s)$ , hvilket følger af:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}'(s) &= \frac{d}{ds} (\mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s)) \\ &= \left( \frac{d}{ds} \mathbf{e}(s) \right) \times \mathbf{f}(s) + \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}'(s) \\ &\perp \mathbf{e}(s) \quad .\end{aligned}\tag{8.27}$$

Da  $\mathbf{g}'(s)$  står vinkelret på både  $\mathbf{g}(s)$  og  $\mathbf{e}(s)$ , så må  $\mathbf{g}'(s)$  være proportional med  $\mathbf{f}(s)$ . Og proportionalitetsfaktoren, torsionen, er derfor veldefineret i definition 8.17. ■

### ||| OPGAVE 8.18

Lad  $\boldsymbol{\eta}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$  betegne en enhedscirkel i  $(x, y)$ -planen. Hvad er torsionen for den kurve?

Da vi ved, at Frenet–Serret vektorerne  $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$ , udgør en basis for alle vektorer i rummet, så kan vi også udtrykke den afledede af  $\mathbf{f}(s)$  som en kombination af de tre vektorer:

**||| Sætning 8.19** Lad  $\boldsymbol{\eta}(s)$  være en buelængdeparametriseret kurve med krumning  $\kappa(s) > 0$ , torsion  $\tau(s)$ , og Frenet–Serret vektorer  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ , og  $\mathbf{g}(s)$ . Så gælder:

$$\mathbf{f}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s) \quad .\tag{8.28}$$

Vi får altså ikke nye oplysninger ved at differentiere  $\mathbf{f}(s)$ .

### ||| OPGAVE 8.20

Lad  $\boldsymbol{\eta}(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$  betegne en vindellinje i rummet.

1. Hvad er krumning og torsion for den kurve?
2. Bestem Frenet–Serret basis for kurven for ethvert  $s$ .
3. Eftersis, at ligning (8.28) er opfyldt i dette tilfælde.

### OPGAVE 8.21

Vis ligningen (8.28) og dermed sætning 8.19 helt generelt.

### 8.3.3 Opsamling

Vi samler definitioner og resultater i følgende sætning:

**Sætning 8.22** En kurve med parameterfremstillingen  $\boldsymbol{\eta}(s)$  og *enhedsfart*  $\|\boldsymbol{\eta}'(s)\| = 1$  for alle  $s$ , har krumning  $\kappa(s)$ , torsion  $\tau(s)$ , og Frenet–Serret vektorer  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ , og  $\mathbf{g}(s)$  givet ved følgende udtryk (vi antager, at krumningen er strengt positiv for alle  $s$ ,  $\kappa(s) > 0$ ):

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \|\boldsymbol{\eta}''(s)\| \\ \tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} (\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) \quad ,\end{aligned}\tag{8.29}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(s) &= \boldsymbol{\eta}'(s) \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{1}{\kappa(s)} \boldsymbol{\eta}''(s) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) \quad .\end{aligned}\tag{8.30}$$

De tre Frenet–Serret vektorfunktioner tilfredsstiller følgende ligninger, hvor  $\kappa(s) > 0$  betegner kurvens krumning, og  $\tau(s)$  betegner kurvens torsion.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \mathbf{f}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{f}(s) \quad .\end{aligned}\tag{8.31}$$

### Bevis

Bemærk, at med de givne definitioner af  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ ,  $\mathbf{g}(s)$ , og  $\kappa(s)$  er det faktisk kun det eksplicitte udtryk for torsionen  $\tau(s)$ , vi mangler at vise.

Ligningen

$$(\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) = \kappa^2(s)\tau(s)\tag{8.32}$$

fås af følgende ingredienser:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \boldsymbol{\eta}'''(s) &= \kappa'(s)\mathbf{f}(s) + \kappa(s)\mathbf{f}'(s) = \kappa'(s)\mathbf{f}(s) + \kappa(s)(\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s)) \\ \boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s) &= \kappa(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{f}(s) &= \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{e}(s) = 0 \quad , \quad \mathbf{g}(s) \cdot \mathbf{g}(s) = 1 \quad .\end{aligned}\tag{8.33}$$

■



Bemærk **rumproduktet** i udtrykket for torsionen:

$$\begin{aligned}\tau(s) &= \frac{1}{\kappa^2(s)} (\boldsymbol{\eta}'(s) \times \boldsymbol{\eta}''(s)) \cdot \boldsymbol{\eta}'''(s) \\ &= \frac{1}{\kappa^2(s)} \text{Rum}(\boldsymbol{\eta}'(s), \boldsymbol{\eta}''(s), \boldsymbol{\eta}'''(s)) \quad .\end{aligned}\tag{8.34}$$

### OPGAVE 8.23

En vindellinje er givet ved en tidsparametrisering  $\mathbf{p}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Konstanten  $a$  antages at være forskellig fra 0, men  $b$  kan være vilkårlig. Se opgave 8.5, figur 8.5, og opgave 8.30.

1. Bestem en enhedsfart parametrisering  $\boldsymbol{\eta}(s)$  af kurven og brug dén i de følgende delopgaver.
2. Bestem Frenet–Serret basisvektorfunktionerne  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ , og  $\mathbf{g}(s)$  for kurven.
3. Bestem kurvens krumning  $\kappa(s)$  og torsion  $\tau(s)$  for enhver værdi af  $a$  og enhver værdi af  $b$ .

Dermed har vi nu besvaret de to (nu elementære) spørgsmål fra tidligere:



De to naturlige spørgsmål var:

1. Hvad er mon torsionen af en cirkel?
2. Hvad er mon krumningen af en vindellinje?

Det har vi nu fundet ud af!

### 8.3.4 Den lokale kurve-form

Hvilken indflydelse har krumning og torsion på en kurves forløb i rummet? Hvordan inspicerer vi en given kurve omkring et givet punkt med henblik på at 'se' hvor meget krumning og torsion kurven 'har' i punktet? Det kan vi på følgende måde ved udnyttelse af buelængdeparametrisering og Frenet–Serret basis:

Vi lader  $\boldsymbol{\eta}(s)$  betegne en buelængdeparametriseret kurve med positiv krumning. Ved at Taylor-udvikle kurvens koordinatfunktioner med udviklingspunktet  $s = 0$  til tredje orden får vi følgende, hvor  $\boldsymbol{\varepsilon}(s)$  betegner en epsilon-vektor-funktion med egenskaben  $\boldsymbol{\varepsilon}(s) \rightarrow \mathbf{0}$  for  $s \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(s) &= s \boldsymbol{\eta}'(0) + \frac{s^2}{2} \boldsymbol{\eta}''(0) + \frac{s^3}{6} \boldsymbol{\eta}'''(0) + s^3 \boldsymbol{\varepsilon}(s) \\ &= \left( s - \kappa^2(0) \frac{s^3}{6} \right) \mathbf{e}(0) + \left( \kappa(0) \frac{s^2}{2} + \kappa'(0) \frac{s^3}{6} \right) \mathbf{f}(0) + \left( \kappa(0) \tau(0) \frac{s^3}{6} \right) \mathbf{g}(0) + s^3 \boldsymbol{\varepsilon}(s) \quad .\end{aligned}\tag{8.35}$$

### OPGAVE 8.24

Hvad er  $\boldsymbol{\eta}'''(s)$  udtrykt ved Frenet–Serret basis samt  $\kappa(s)$ ,  $\kappa'(s)$  og  $\tau(s)$ ? Og hvordan er det udtryk benyttet i ovenstående? Vink: Se ligningerne i (8.33).

I Frenet–Serret basen  $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS}$  kan kurven nu lokalt udtrykkes ved de approksimerende koordinatfunktioner, hvor vi kun benytter de **lavest forekommende potenser** af  $s$  for hver koordinatfunktion fra Taylor-udviklingen i (8.35):

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (\hat{x}(s), \hat{y}(s), \hat{z}(s)) = \left( s, \left( \frac{\kappa(0)}{2} \right) s^2, \left( \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6} \right) s^3 \right) \quad (8.36)$$

Vi isolerer og eliminerer dernæst  $s$  af ovenstående ligning og får de simple koordinatrelationer:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \left( \frac{1}{2} \cdot \kappa(0) \right) \cdot \hat{x}^2 \\ \hat{y}^3 &= \left( \frac{9}{2} \cdot \frac{\kappa(0)}{\tau^2(0)} \right) \cdot \hat{z}^2 \\ \hat{z} &= \left( \frac{1}{6} \cdot \kappa(0) \cdot \tau(0) \right) \cdot \hat{x}^3 \end{aligned} \quad (8.37)$$

Specielt får vi altså heraf, at enhver kurve, der plottes i sin egen Frenet–Serret basis projiceres approksimativt på en **parabel** i  $(\hat{x}, \hat{y})$ -planen og på en **tredjegradskurve** i  $(\hat{x}, \hat{z})$ -planen.

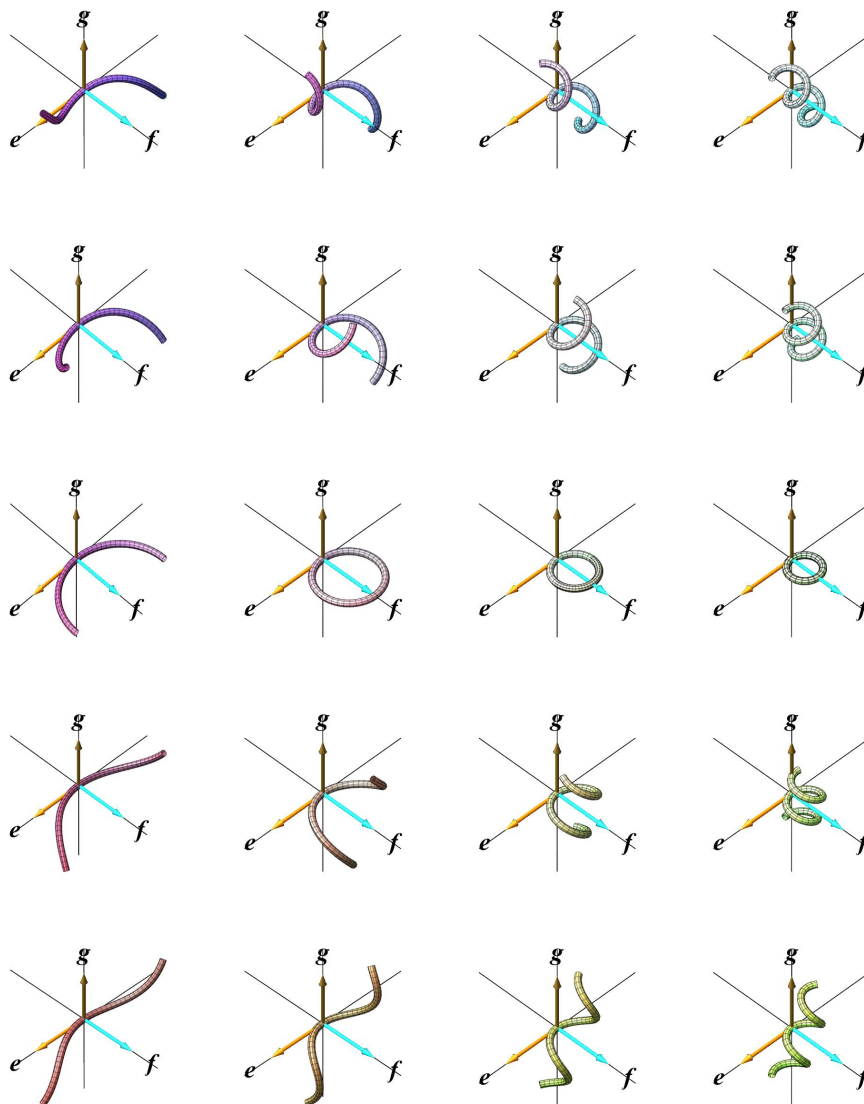
Parablens koefficient på  $\hat{x}^2$  er  $\kappa(0)/2$ , så krumningen af kurven  $\boldsymbol{\eta}(s)$  i punktet  $\boldsymbol{\eta}(0)$  kan således aflæses af parabelen. Tredjegradskurvens koefficient på  $\hat{x}^3$  er  $\kappa(0) \cdot \tau(0)/6$ , så torsionen af kurven  $\boldsymbol{\eta}(s)$  i punktet  $\boldsymbol{\eta}(0)$  kan dermed også aflæses af tredjegradskurven - når vi kender krumningen  $\kappa(0)$ .



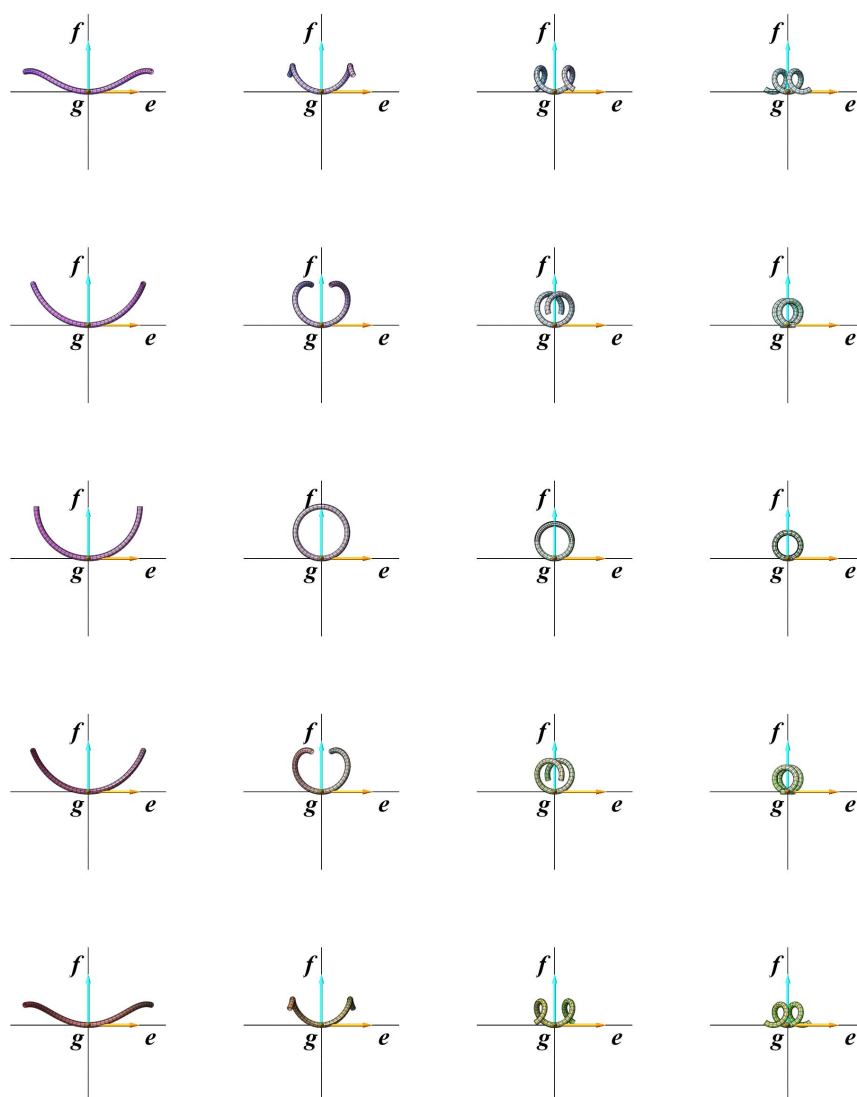
Hvis buelængdeparametriseringen  $\boldsymbol{\eta}(s)$  er givet og der ønskes en lokal undersøgelse som ovenfor men i det punkt der svarer til  $s = s_0$ , hvordan ser udtrykkene i ligningerne (8.35), (8.36), og (8.37) så ud?

Den lokale inspektion af krumning og torsion i Frenet–Serret basen for punkter på vindellinjer med forskellige værdier af krumning og torsion er illustreret i figurerne 8.9, 8.10 og 8.11 samt eksempel 8.27 nedenfor. Se også en tilsvarende matrix med vindellinjerne i det almindelige koordinatsystem i figur 8.16 og den tilhørende inspektionsopgave 8.31.

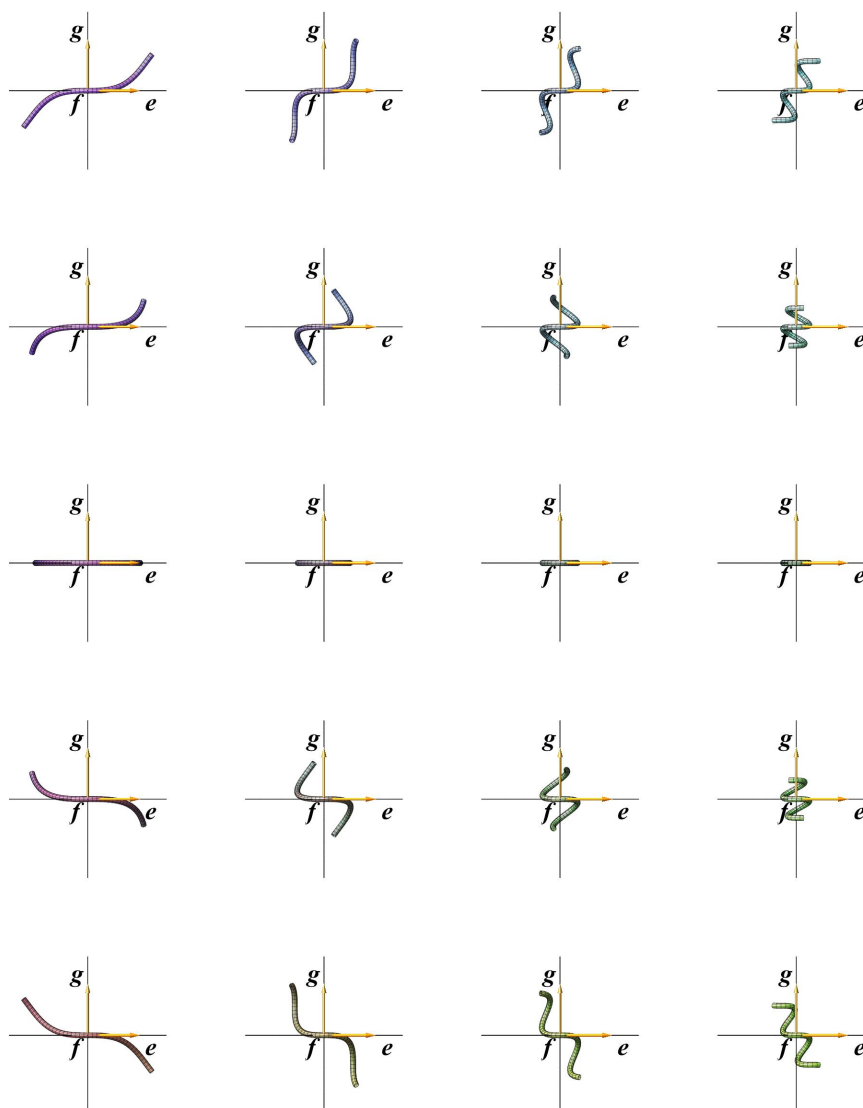




Figur 8.9: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis.



Figur 8.10: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis, her set langs  $\mathbf{g}$ -aksen, således at den halve krumning  $\kappa(0)/2$  hermed kan ' aflæses' som koefficienten på  $x^2$  i det approksimerende andengradspolynomium i punktet  $\mathbf{p}(0)$ .



Figur 8.11: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle er vist i en tilhørende Frenet–Serret basis, her set langs  $\mathbf{f}$ -aksen, således at  $\kappa(0) \cdot \tau(0)/2$  hermed kan 'afleses' som koefficienten på  $\hat{x}^3$  i det approksimerende tredjegradspolynomium i punktet  $\mathbf{p}(0)$ .

## 8.4 Krumning og torsion for tids-parametriserede kurver

Som allerede antydnet ovenfor kan det være en besværlig sag at finde en enhedsfart-parametrisering, en  $s$ -parametrisering, af en given kurve ud fra en given  $t$ -parametrisering af kurven. Heldigvis kan vi alligevel forholdsvis enkelt beregne Frenet–Serret basis  $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$  og krumningen  $\kappa(t)$ , og torsionen  $\tau(t)$  i et vilkårligt punkt  $\mathbf{p}(t)$  på kurven som funktioner af den givne tids-parameter  $t$ . Det er samlet i følgende sætning:

### 8.4.1 Krumning, torsion og Frenet–Serret basis for tidsparametriserede kurver

**Sætning 8.25** En kurve med parameterfremstillingen  $\mathbf{p}(t)$  med  $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$  for alle  $t$  har krumning, torsion, og Frenet–Serret vektorer givet ved følgende udtryk, hvor  $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$  betegner farten af den tilhørende bevægelse:

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|}{v^3(t)} \quad (8.38)$$

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2} \quad \text{når } \kappa(t) > 0$$

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)}$$

$$\mathbf{g}(t) = \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \quad (8.39)$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t) \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \quad .$$

Bemærk, at  $\mathbf{e}(t)$  og  $\mathbf{g}(t)$  beregnes lettest før  $\mathbf{f}(t)$ . Frenet–Serret vektorfunktionerne  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$  tilfredsstiller nu følgende ligninger, hvor  $\kappa(t)$  betegner kurvens krumning,  $\tau(t)$  betegner kurvens torsion, og  $v(t)$  farten af bevægelsen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= -v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \quad . \end{aligned} \quad (8.40)$$



Bemærk igen rumprodukt-delen af torsionen i ligning (8.38) jvf. (8.34).

### OPGAVE 8.26

Vis, at ovenstående udtryk lige præcis reducerer til dem vi fandt i sætning 8.22 når kurven  $\mathbf{p}(t)$  er parametriseret med enhedsfart  $v(t) = 1$  for alle  $t$ .

### Eksempel 8.27

Vi betragter den plane kurve, en **parabel**, der er givet som grafen for denne funktion:  $y = x^2$  i  $(x, y)$ -planen. Kurven kan vi opfatte som en parametriseret rumkurve på følgende måde:

$$\mathcal{K} : \mathbf{p}(t) = (t, t^2, 0), \quad (8.41)$$

hvoraf vi får følgende ingredienser til beregning af Frenet-Serret elementerne for kurven:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= (1, 2t, 0) \neq (0, 0, 0) \quad \text{for alle } t \\ v(t) &= \sqrt{1 + 4t^2} \\ \mathbf{p}''(t) &= (0, 2, 0) \\ \mathbf{p}'''(t) &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t) &= (0, 0, 2) \\ \|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\| &= 2 \\ (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t) &= 0 \\ \kappa(t) &= \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (8.42)$$

Specielt er altså  $\kappa(0) = 2$  i overensstemmelse med, at Taylorudviklingen af kurven i Frenet-Serret basen i kurvens toppunkt netop skal give parablen  $\hat{y} = (\kappa(0)/2) \cdot \hat{x}^2$ , jvf. (8.37).

### OPGAVE 8.28

Bestem Frenet-Serret basis  $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$  for parablen i eksemplet 8.27 ovenfor.

### Eksempel 8.29

Mere generelt, grafen for en funktion  $y = f(x)$  i  $(x, y)$ -planen kan parametriseres:

$$\mathcal{K} : \mathbf{p}(t) = (t, f(t), 0), \quad (8.43)$$

hvoraf udledes, som i eksempel 8.27:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Figur 8.12: Animation af Frenet–Serret basis langs kurven  $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$ .

### OPGAVE 8.30

En generel **vindellinje** er som bekendt givet ved parameterfremstillingen:

$$\mathcal{K} : \mathbf{p}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad (8.45)$$

hvor  $a \neq 0$ . Bestem *direkte* ved hjælp af Sætning 8.25 krumningen, torsionen, og Frenet–Serret vektor-funktionerne for denne vindellinje. Sammenlign med resultatet fra opgave 8.23.

### OPGAVE 8.31

I figurerne 8.16, 8.9, 8.10 og 8.11 ses tabeller med billeder af vindellinjer. De har alle samme længde (to af de viste cirkler overlejrer til en vis grad sig selv). Krumningerne af de respektive vindellinjer er heltallene fra og med 1 til og med 4. Torsionerne af de respektive vindellinjer er heltallene fra og med  $-2$  til og med 2. Marker på én af figurerne hvilke vindellinjer der har hvilke kombinationer af krumning og torsion. Se evt. figur 8.13 som viser animationer dels igennem torsioner med fast krumning og dels igennem krumninger med fast torsion.

## 8.4.2 Approksimerende vindellinjer

I lighed med Taylor approksimationen i afsnit 8.3.4 som gav approksimerende parabler og tredjegradskurver i Frenet–Serret basens koordinatplaner, vil vi her se hvordan vi også kan approksimere en vilkårlig kurve med vindellinjer i ethvert punkt på kurven.

Figur 8.13: Animation af vindellinje med konstant længde, men med variabel torsion og krumning, henholdsvis.

||| **Sætning 8.32** Givet en tidsparametriseret regulær kurve  $\mathbf{p}(t)$  med positiv krumning  $\kappa(0)$  og torsion  $\tau(0)$  i punktet  $\mathbf{p}(0)$ . Så findes der præcis én vindellinje  $\mathcal{V}$  som både går igennem punktet  $\mathbf{p}(0)$ , har samme tangent  $\mathbf{p}'(0)$  som kurven og samme krumning  $\kappa(0)$  og torsion  $\tau(0)$  som kurven i punktet.

Den vindellinje vil vi selvfølgelig kalde den **approximerende vindellinje** til kurven i punktet.

Når vi har kurvens Frenet–Serret basis  $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS}$  til rådighed i det udvalgte kurvepunkt  $\mathbf{p}(0)$  er det ikke svært at konstruere den søgte vindellinje.

Standard-vindellinjen er givet ved  $\mathbf{r}(u) = (a \cos(ku), a \sin(ku), bku)$ , hvor  $a > 0$ ,  $b$ , og  $k > 0$  er konstanter, der bestemmer dels vindellinjens krumning og torsion og dels farten af parameterfremstillingen. Vindellinjen har jo sin helt egen Frenet–Serret basis  $\{\mathbf{e}(0), \mathbf{f}(0), \mathbf{g}(0)\}_{FS(\mathbf{r})}$  i det punkt, der svarer til  $u = 0$ .

Vi bestemmer først konstanterne  $a$ ,  $b$ , og  $k$  for vindellinjen, sådan at den har konstant fart  $v(0) = \|\mathbf{p}'(0)\|$ , (konstant) krumning  $\kappa(0)$  og (konstant) torsion  $\tau(0)$ . Dvs. vi bestemmer  $a$ ,  $b$ , og  $k$  således at:

$$\begin{aligned}\kappa(0) &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\ \tau(0) &= \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \|\mathbf{p}'(0)\| &= v(0) = k \sqrt{a^2 + b^2} \quad .\end{aligned}\tag{8.46}$$

Heraf finder vi  $a > 0$ ,  $b$ , og  $k > 0$ :

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\kappa^2(0) + \tau^2(0)} \cdot v(0) \\ a &= \frac{\kappa(0)}{\kappa^2(0) + \tau^2(0)} \\ b &= \frac{\tau(0)}{\kappa^2(0) + \tau^2(0)} \end{aligned} \quad (8.47)$$

Bemærk specielt, at  $b$  har samme fortegn som  $\tau(0)$  således at kurven og den approksimerende vindellinje har samme type torsion, i.e. de er begge venstre-skruede eller begge højre-skruede.

### ||| OPGAVE 8.33

|| Vis ved indsættelse, at ovenstående værdier løser ligningerne i (8.46).

Den fundne vindellinje kan dernæst roteres og translateres 'på plads' så den netop bringes til at approksimere kurven  $\mathbf{p}(t)$  på stedet  $\mathbf{p}(0)$ . Rotationen er naturligvis den rotation i rummet, der roterer Frenet–Serret basen for vindellinjen over i Frenet–Serret basen for kurven. Resultatet er illustreret og animeret i figur 8.14. Det ses at de konstruerede vindellinjer approksimerer den givne kurve i ethvert punkt.

Figur 8.14: Animation af approksimerende vindellinje-stykke (med konstant længde) langs kurven  $\mathbf{p}(t) = (t, t^2, t^3)$



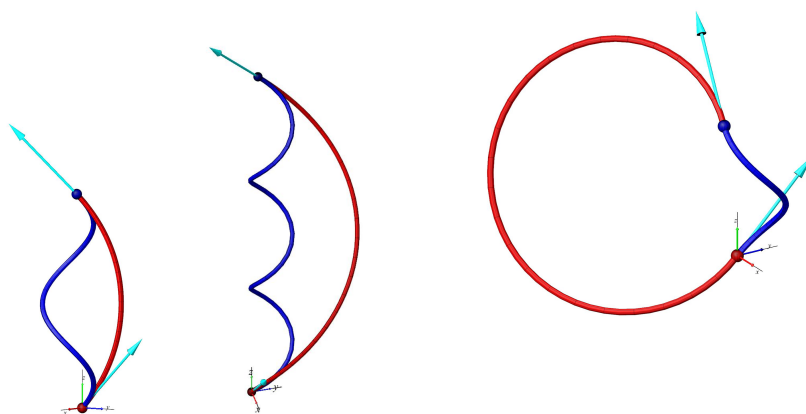
### OPGAVE 8.34

Et sammenhængende stykke af en helix (vindellinje) kaldes *kort* hvis den ikke når at gå en hel gang rundt om sin akse. Se figur 8.15.

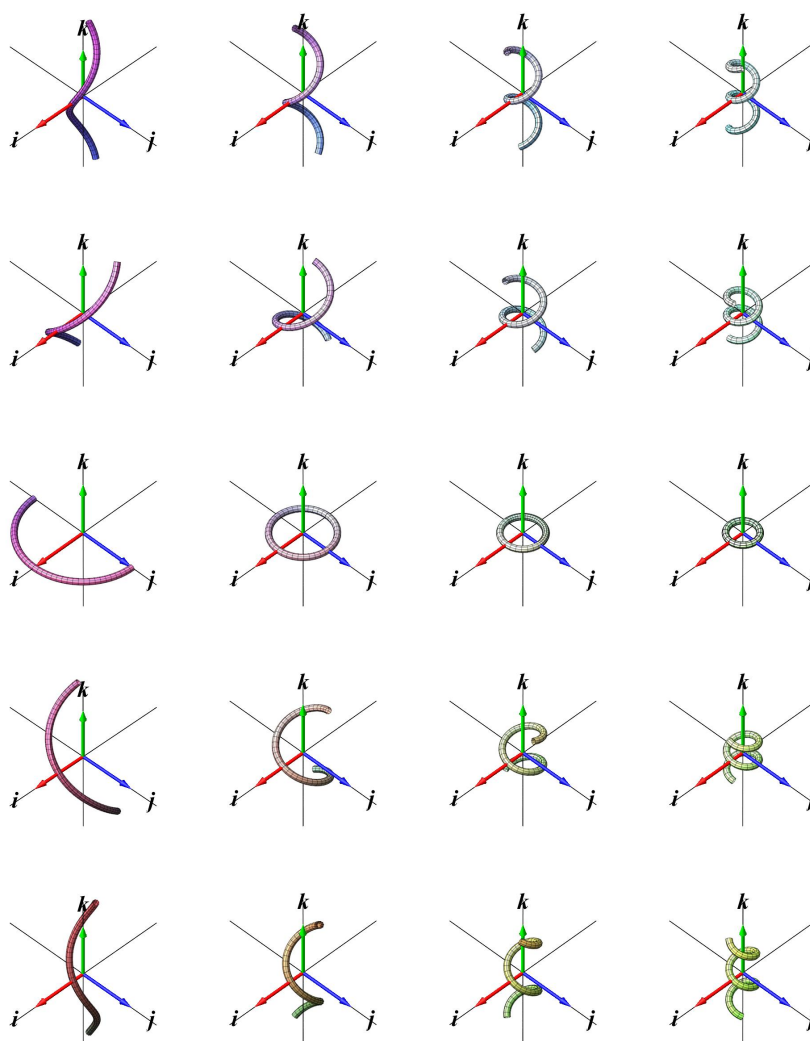
Et forholdsvis nyt resultat (fra 2013) om vindellinjer er udtrykt i følgende sætning, se [DBT]: Lad  $\mathbf{p}_0$  og  $\mathbf{p}_1$  være (stedvektorer til) to punkter i rummet og lad  $\mathbf{v}_0$  og  $\mathbf{v}_1$  være to enhedsvektorer med fodpunkter i henholdsvis  $\mathbf{p}_0$  og  $\mathbf{p}_1$ . Så findes der netop én kort vindellinje fra  $\mathbf{p}_0$  og  $\mathbf{p}_1$  med tangentvektorerne  $\mathbf{v}_0$  og  $\mathbf{v}_1$  hvis og kun hvis følgende simple betingelse er opfyldt:

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) = 0 \quad . \quad (8.48)$$

Kan du give et kort argument for den påstand?



Figur 8.15: Vindellinjer, der forbinder to punkter med samme tangentlinjer i endepunkterne. Den ene (rød) er altid kort, mens den anden ikke nødvendigvis er længst (som yderst til højre).



Figur 8.16: Vindellinjer med forskellige kombinationer af krumning og torsion. Alle vindellinjer er her vist i det sædvanlige retvinklede koordinatsystem i rummet. Det er forholdsvis simpelt at spotte størrelsen af krumning og torsion samt fortegnet af torsionen – se opgave 8.31 og sammenlign med figurene 8.9, 8.10, og 8.11.

### 8.4.3 SI-enheden for krumning og torsion

Vi indfører enhederne for de størrelser, der indgår i krumnings- og torsions-formlerne. Vi bruger udelukkende SI-enheder, se [Wiki; International\\_System\\_of\\_Units](#):

1. Farten  $v$  måles i meter per sekund:  
 $v = \{v\} [v]$ , hvor  $[v] = \text{m/s}$ .
2. Hastighedsvektorer  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}'(t)$  har koordinater, der måles i meter per sekund:  
 $v_i = \{v_i\} [v_i]$ , hvor  $[v_i] = \text{m/s}$ .
3. Accelerationsvektorer  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{p}''(t)$  har koordinater, der måles i meter per sekund i anden:  
 $a_i = \{a_i\} [a_i]$ , hvor  $[a_i] = \text{m/s}^2$ .
4. Accelerationens tidsafledede  $\mathbf{a}'(t) = \mathbf{p}'''(t)$  har koordinater, der måles i meter per sekund i tredje:  
 $a'_i = \{a'_i\} [a'_i]$ , hvor  $[a'_i] = \text{m/s}^3$ .
5. Koordinaterne for prikproduktet mellem to vektorer  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  måles i produktet af enhederne for koordinaterne for henholdsvis  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ .
6. Koordinaterne for krydsproduktet mellem to vektorer  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  måles i produktet af enhederne for koordinaterne for henholdsvis  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ .

Vi benytter dernæst den generelle formel for krumning og torsion som givet i sætning 8.25 og får:

||| **Sætning 8.35** SI-enheden for både krumning og torsion er  $[\kappa(t)] = \text{m}^{-1}$  og  $[\tau(t)] = \text{m}^{-1}$ .

### ||| OPGAVE 8.36

|| Vis den sætning ved at indsætte enheder i de respektive ligninger fra sætning 8.25.

## 8.5 Plane kurver

Hvis en rum-kurve er helt indeholdt i en plan i rummet, så vil vi naturligvis sige, at kurven er en **plan kurve**.

Lad os antage at kurven  $\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $s \in [\alpha, \beta]$ , er regulær og buelængde-parametriseret. Så er  $\boldsymbol{\eta}(s)$  helt indeholdt i den plan, der har ligningen  $ax + by + cz = d$ , hvis (og kun hvis):

$$ax(s) + by(s) + cz(s) = d \quad , \quad \text{for alle } s \in [\alpha, \beta] \quad . \quad (8.49)$$

Lader vi nu  $s_0$  betegne et tal i  $[\alpha, \beta]$  betyder det, at  $\boldsymbol{\eta}(s)$  er helt indeholdt i planen hvis og kun hvis

$$a(x(s) - x(s_0)) + b(y(s) - y(s_0)) + c(z(s) - z(s_0)) = 0 \quad , \quad \text{for alle } s \in [\alpha, \beta] \quad , \quad (8.50)$$

som er ækvivalent med, at  $(x(s) - x(s_0), y(s) - y(s_0), z(s) - z(s_0))$  står vinkelret på  $(a, b, c)$ :

$$(\boldsymbol{\eta}(s) - \boldsymbol{\eta}(s_0)) \cdot (a, b, c) = 0 \quad . \quad (8.51)$$

### ||| OPGAVE 8.37

Lad  $\boldsymbol{\eta}(s)$  betegne følgende rumkurve:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cos(s), \sqrt{2} \sin(s) + \cos(s), \sqrt{2} \sin(s) - \cos(s)\right) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad . \quad (8.52)$$

1. Vis, at kurven er indeholdt i en plan og find en ligning for den plan.
2. Find torsionen af kurven.

Det er ikke nogen tilfældighed, at kurven i opgave 8.37 har torsion 0:

||| **Sætning 8.38** En regulær rumkurve med positiv krumning har overalt torsionen  $\tau = 0$  hvis og kun hvis kurven er en plan kurve.

### ||| Bevis

Vi antager, at kurven er buelængde-parametriseret. Hvis kurven ligger helt indeholdt i en plan så er kurvens tangentvektor  $\mathbf{e}(s)$  vinkelret på en konstant enhedsnormal-vektor  $\mathbf{N}$  til planen:

$$\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{N} = 0 \quad , \quad (8.53)$$

sådan at

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{N}) &= 0 \\ \mathbf{e}'(s) \cdot \mathbf{N} + \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{N}' &= 0 \\ \mathbf{e}'(s) \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \kappa(s) \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{N} &= 0 \\ \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{N} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (8.54)$$

fordi  $\mathbf{N}$  er konstant og  $\kappa(s) > 0$ . Men dermed er både  $\mathbf{e}(s)$  og  $\mathbf{f}(s)$  vinkelrette på  $\mathbf{N}$  således at  $\mathbf{g}(s) = \pm \mathbf{N}$  for alle  $s$ . Dermed er  $\mathbf{g}'(s) = 0$  for alle  $s$  og derfor er  $\tau(s) = 0$  for alle  $s$ .

Omvendt, hvis  $\tau(s) = 0$  for alle  $s$  har vi  $\mathbf{g}'(s) = 0$ , så  $\mathbf{g}(s) = \mathbf{g}_0$ , en konstant vektor. Men dermed har vi også:

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{\eta}(s) \cdot \mathbf{g}_0) = \boldsymbol{\eta}'(s) \cdot \mathbf{g}_0 = \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{g}_0 = 0 \quad , \quad (8.55)$$

sådan at  $\boldsymbol{\eta}(s) \cdot \mathbf{g}_0$  er en konstant og sådan at  $(\boldsymbol{\eta}(s) - \boldsymbol{\eta}(s_0)) \cdot \mathbf{g}_0 = 0$ , hvilket netop betyder, at  $\boldsymbol{\eta}(s)$  er en plan kurve – indeholdt i en plan der har normalvektor  $\mathbf{g}_0$ . ■

### OPGAVE 8.39

Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne følgende rumkurve:

$$\mathbf{p}(t) = \left( \sqrt{2}(\cos(t) + 1), 3\sqrt{2}\sin(t) + \cos(t) + 1, 3\sqrt{2}\sin(t) - \cos(t) - 1 \right) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad . \quad (8.56)$$

1. Find torsionen  $\tau(t)$  af kurven.
2. Vis, at kurven er indeholdt i en plan og find en ligning for den plan.

#### 8.5.1 Plane kurver – i $(x, y)$ -planen

I det følgende vil vi antage, at kurverne vi betragter, er plane og at de er indeholdt i  $(x, y)$ -planen.

I  $(x, y)$ -planen kan vi udnytte **orienteringsfordelen**: Enhver vektor  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$  har en entydig bestemt 'hat'- eller 'tvær'-vektor  $\widehat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1, 0)$ , som fremkommer ved at dreje  $\mathbf{a}$  vinklen  $\pi/2$  i  $(x, y)$ -planen i positiv omløbsretning, dvs. imod uret, dvs. i den omdrejnings-retning der drejer  $x$ -aksen over i  $y$ -aksen. De to vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\widehat{\mathbf{a}}$  er specielt vinkelrette på hinanden.

Lad os nu betragte en buelængde-parametriseret kurve i  $(x, y)$ -planen  $\boldsymbol{\eta}(s) = (x(s), y(s), 0)$  med krumning  $\kappa(s)$ . I de punkter hvor krumningen er positiv har vi også en torsion  $\tau(s)$  og en Frenet-Serret basis  $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}_{FS}$ , hvor  $\mathbf{g}(s) = \mathbf{0}$  for alle  $s$ .

I planen er  $\boldsymbol{\eta}''(s) = \mathbf{e}'(s)$  altid proportional med  $\widehat{\mathbf{e}(s)}$ , så vi har dermed i ethvert punkt på kurven en proportionalitetsfaktor, som vi vil kalde  $\kappa_{\pm}(s)$ :

||| **Definition 8.40** For en plan buelængdeparametriseret kurve  $\boldsymbol{\eta}(s)$  med  $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$  definerer vi  $\kappa_{\pm}(s)$  ved ligningen:

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa_{\pm}(s) \widehat{\mathbf{e}(s)} \quad , \quad (8.57)$$

som er ækvivalent med

$$\kappa_{\pm}(s) = \widehat{\mathbf{e}(s)} \cdot \mathbf{e}'(s) \quad . \quad (8.58)$$

I de punkter hvor  $\kappa(s) > 0$  har vi også – per definition af  $\kappa(s)$

$$\mathbf{e}'(s) = \boldsymbol{\eta}''(s) = \kappa(s) \mathbf{f}(s) \quad , \quad (8.59)$$

sådan at

$$\kappa_{\pm}(s) = \kappa(s) \left( \mathbf{f}(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)} \right) \quad , \quad (8.60)$$

hvor prikproduktet på højre side af ligningen enten er 1 eller  $-1$ . Heraf betegnelsen  $\kappa_{\pm}(s)$ .

Med andre ord har vi  $|\kappa_{\pm}(s)| = \kappa(s)$  og fortegnet for  $\kappa_{\pm}(s)$  er  $+1$  når  $\mathbf{e}(s)$  drejes i positiv omløbsretning (dvs.  $\mathbf{e}'(s)$  har samme retning som  $\widehat{\mathbf{e}(s)}$ ) og fortegnet er  $-1$  når  $\mathbf{e}(s)$  drejes i negativ omløbsretning (dvs.  $\mathbf{e}'(s)$  har modsat retning af  $\widehat{\mathbf{e}(s)}$ ) under bevægelsen langs den plane kurve igennem voksende  $s$ -værdier.

Se eksemplet i figur 8.17, hvor hastighedsvektoren  $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$  er angivet under bevægelsen (med fart 1) på kurven sammen med den inducerede krumning med fortegn.

### ||| OPGAVE 8.41

|| Find udtrykket for den orienterede krumning  $\kappa_{\pm}(t)$  som funktion af  $t$  for en regulær  $t$ -parametriseret kurve  $\mathbf{p}(t)$  i  $(x,y)$ -planen.

## 8.5.2 Plane kurver med givne krumningsfunktioner $\kappa_{\pm}(s)$ .

Vi antager, at krumningen  $\kappa_{\pm}(s)$  for en buelængdeparametriseret plan kurve er givet. Vores opgave er at konstruere en kurve i planen, som har den givne krumning som funktion af buelængdeparameteren  $s$ .

Da  $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$  er en enhedsvektor, kan den skrives på følgende form:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)), 0) \quad , \quad (8.61)$$

hvor  $\phi(s)$  er en glat funktion af  $s$ , der simpelthen måler vinklen mellem kurvens tangentvektor  $\boldsymbol{\eta}'(s)$  og  $x$ -aksen (dvs. vektoren  $(1,0,0)$ ).

Vi kan udtrykke krumningen – med fortegn – for den plane kurve ved hjælp af (den afledede af)  $\phi(s)$ :

### ||| Sætning 8.42

$$\kappa_{\pm}(s) = \phi'(s) \quad . \quad (8.62)$$

Figur 8.17: Bevægelse med buelængdeparametrisering langs den plane kurve fra figur 8.7. I midten ses hastigheds-indikatoren  $\boldsymbol{\eta}'(s) = \mathbf{e}(s)$  og (til højre) krumnings-indikatoren  $\kappa_{\pm}(s)$ .

### ||| Bevis

Det følger direkte dels af  $\boldsymbol{\eta}''(s) = \kappa_{\pm}(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)}$  og dels af:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}''(s) &= (-\phi'(s) \cdot \sin(\phi(s)), \phi'(s) \cdot \cos(\phi(s)), 0) \\ &= \phi'(s) \cdot \widehat{\mathbf{e}(s)} \quad . \end{aligned} \tag{8.63}$$

■

Da  $\kappa_{\pm}(s)$  er en givet glat funktion af  $s$  kan vi jo integrere den og dermed få

$$\int_0^s \kappa_{\pm}(u) du = \int_0^s \phi'(u) du = \phi(s) - \phi(0) \quad . \tag{8.64}$$

På den anden side ved vi:

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = (\cos(\phi(s)), \sin(\phi(s)), 0) \quad , \tag{8.65}$$

sådan at

$$\begin{aligned}\eta(s) &= \int_0^s \eta'(u) du + \eta(0) \\ &= \int_0^s (\cos(\phi(u)), \sin(\phi(u)), 0) du + \eta(0) \\ &= \int_0^s \left( \cos \left( \int_0^u \kappa_{\pm}(v) dv + \phi(0) \right), \sin \left( \int_0^u \kappa_{\pm}(v) dv + \phi(0) \right), 0 \right) du + \eta(0) \quad .\end{aligned}\tag{8.66}$$

Heraf følger: Hvis vi vælger  $\eta(0) = (0, 0, 0)$  og hvis vi vælger  $\phi(0) = 0$ , så har vi en eksplisit kurve med den ønskede krumningsfunktion (med fortegn):

$$\eta(s) = \int_0^s \left( \cos \left( \int_0^u \kappa_{\pm}(v) dv \right), \sin \left( \int_0^u \kappa_{\pm}(v) dv \right), 0 \right) du \quad .\tag{8.67}$$



Overvej hvad de valg betyder. Dvs. hvis vi havde valgt andre  $\eta(0)$  og  $\phi(0)$ , hvilke andre kurver havde vi så fået?

Vi kan samle de ovenstående overvejelser til følgende:

||| **Sætning 8.43** Lad  $\kappa_{\pm}(s)$  være en given glat funktion. Så findes der en buelængdeparametriseret kurve  $\eta(s)$  i  $(x, y)$ -planen der har den givne funktion som krumningsfunktion med fortegn. Kurven er entydigt bestemt op til rotation og translation. Den repræsentant der går gennem  $(0, 0, 0)$  med tangentvektoren  $\eta'(0) = (1, 0, 0)$  er bestemt direkte ved følgende formel:

$$\eta(s) = \left( \int_0^s \cos \left( \int_0^u \kappa_{\pm}(v) dv \right) du, \int_0^s \sin \left( \int_0^u \kappa_{\pm}(v) dv \right) du, 0 \right) \quad .\tag{8.68}$$

### ||| OPGAVE 8.44

Her er 4 (orienterede) krumningsfunktioner for 4 plane kurver i  $(x, y)$ -planen:

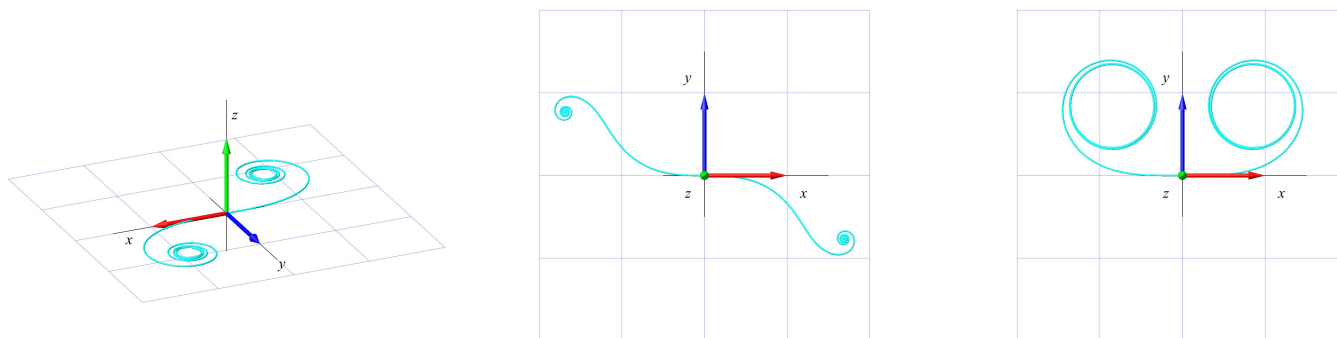
1.  $\kappa_{\pm}(s) = s$
2.  $\kappa_{\pm}(s) = e^{-s}$
3.  $\kappa_{\pm}(s) = s^3 - 2s$
4.  $\kappa_{\pm}(s) = \frac{2s^2}{s^2+1}$  .

I figur 8.18 er vist 3 plane kurver i  $(x, y)$ -planen.

Hvilken af de 4 krumningsfunktioner passer til hver enkelt af de 3 plane kurver?

Plot selv den 'manglende' kurve.





Figur 8.18: Plane kurver med givne krumningsfunktioner. Men hvilke?

## 8.6 Frenet-Serret styring af et basistetraeder

I ethvert punkt  $p(t)$  på en given regulær rum-kuve  $\mathbf{p}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , med positiv krumning, vil vi nu opbygge et tetraeder, der skal være en roteret (og derefter parallelforskudt) kopi af basistetraederet. Den givne fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  får nu *total indflydelse* på styringen af tetraederet, nemlig via Frenet–Serret basis for kurven, som jo definerer et entydigt bestemt treben (tetraeder) i ethvert punkt med de parvis ortogonale enheds-vektorer  $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$  som kantvektorer:

||| **Definition 8.45** Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne en regulær rumkurve. Det tilhørende **Frenet–Serret treben** defineres for ethvert  $t$  ved:

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \quad (8.69)$$

hvor  $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}_{FS}$  er den til kurven hørende Frenet–Serret basis på stedet  $p(t)$ , således at

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad , \quad (8.70)$$

hvor rotationsmatricen  $\mathbf{R}(t)$  nu er givet ved Frenet–Serret kantvektorerne:

$$\mathbf{R}(t) = [ \mathbf{e}^*(t) \quad \mathbf{f}^*(t) \quad \mathbf{g}^*(t) ] \quad . \quad (8.71)$$

Rotationsmatricen  $\mathbf{R}(t)$  for et Frenet–Serret treben kan naturligvis differentieres og analyseres på samme måde som i kapitel 7 med tilhørende aksematrix  $\mathbf{\Omega}(t)$  og associeret aksevektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Lad os lige repetere:

For en given tidsafhængig rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  finder vi først den skævsymmetriske tidsafhængige

aksematrix

$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.72)$$

hvoraf vi aflæser den associerede tidsafhængige aksevektor  $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ .

Med Frenet–Serret rotationsmatricen  $\mathbf{R}(t)$  for en kurve til rådighed kan vi nu også definere en anden skævsymmetrisk matrix:

||| **Definition 8.46** Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne en regulær tidsparametriseret rumkurve med Frenet–Serret rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$ . Vi definerer den tidsafhængige **krumningsmatrix** eller **Frenet–Serret-matrix**  $\mathbf{\Xi}(t)$  for kurven således:

$$\mathbf{\Xi}(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \quad . \quad (8.73)$$

Denne nye tidsafhængige matrix er interessant fordi den indeholder krumningen  $\kappa(t)$  og torsionen  $\tau(t)$  for kurven  $\mathbf{p}(t)$  – deraf navnet *krumningsmatrix*:

||| **Sætning 8.47** Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne en regulær tidsparametriseret rumkurve med Frenet–Serret rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$ . Krumningsmatricen  $\mathbf{\Xi}(t)$  for en Frenet–Serret rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  er skævsymmetrisk for alle  $t$  og elementerne er følgende:

$$\mathbf{\Xi}(t) = \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t) \cdot \kappa(t) & 0 \\ v(t) \cdot \kappa(t) & 0 & -v(t) \cdot \tau(t) \\ 0 & v(t) \cdot \tau(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.74)$$

hvor  $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$  betegner farten, altså længden af den tids-afledede af  $\mathbf{p}(t)$ .

### ||| Bevis

Skævsymmetrien af  $\mathbf{\Xi}(t)$  følger på samme måde som for  $\mathbf{\Omega}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \mathbf{E} \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}(t)) \\ &= \mathbf{R}'^*(t) \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \quad , \end{aligned} \quad (8.75)$$

således at

$$\begin{aligned} -\mathbf{R}'^*(t) \cdot \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ -(\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t))^* &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ -\mathbf{\Xi}^*(t) &= \mathbf{\Xi}(t) \quad . \end{aligned} \quad (8.76)$$

Derudover ved vi om indholdet i  $\Xi(t)$  (fra ligning (8.40)) at:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= -v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \quad , \end{aligned} \quad (8.77)$$

sådan at

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}'^*(t) & \mathbf{f}'^*(t) & \mathbf{g}'^*(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (v(t)\kappa(t)\mathbf{f}^*(t)) & (-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}^*(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}^*(t)) & (-v(t)\tau(t)\mathbf{f}^*(t)) \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (8.78)$$

hvilket præcis giver følgende matrix-produkt:

$$\mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v(t) \cdot \kappa(t) & 0 \\ v(t) \cdot \kappa(t) & 0 & -v(t) \cdot \tau(t) \\ 0 & v(t) \cdot \tau(t) & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (8.79)$$

■

### Eksempel 8.48

Vi lader  $\mathbf{p}(s)$  betegne følgende kurve – en cirkel med radius  $a > 0$  i  $(x, y)$ -planen – som er parametriseret med enhedsfart:

$$\mathbf{p}(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a), 0) \quad . \quad (8.80)$$

Så har vi følgende ingredienser til konstruktion af Frenet–Serret trebenet og til analyse af trebenets rotation:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \mathbf{p}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\ \mathbf{p}''(s) &= \left(-\frac{1}{a} \cos(s/a), -\frac{1}{a} \sin(s/a), 0\right) \\ \kappa(s) &= \|\mathbf{p}''(s)\| = \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (8.81)$$

$$\mathbf{f}(s) = \frac{\mathbf{p}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0)$$

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0, 0, 1) \quad ,$$

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} -\sin(s/a) & -\cos(s/a) & 0 \\ \cos(s/a) & -\sin(s/a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

$$\mathbf{R}'(s) = \begin{bmatrix} -\cos(s/a)/a & \sin(s/a)/a & 0 \\ -\sin(s/a)/a & -\cos(s/a)/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

således at

$$\Omega(s) = \mathbf{R}'(s) \cdot \mathbf{R}^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.83)$$

$$\boldsymbol{\omega}(s) = (0, 0, 1/a) \quad ,$$

og

$$\mathbf{\Xi}(s) = \mathbf{R}^*(s) \cdot \mathbf{R}'(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.84)$$

### OPGAVE 8.49

Dette er opgave 2 fra 2-timersprøven, E09. En kurve er givet ved en parametrisering således:

$$p(s) = (3 \cos(s/5), 3 \sin(s/5), 4s/5) \quad , \quad \text{hvor } s \in [0, 5\pi] \quad . \quad (8.85)$$

1. Vis, at kurven er enhedsfart-parametriseret.
2. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer  $\mathbf{e}(s)$ ,  $\mathbf{f}(s)$ , og  $\mathbf{g}(s)$  for kurven.
3. Bestem krumningen  $\kappa(s)$  for kurven.
4. Bestem torsionen  $\tau(s)$  for kurven.

### OPGAVE 8.50

En vindellinje er givet ved en tidsparametrisering  $\mathbf{p}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Konstanten  $a$  antages at være forskellig fra 0, men  $b$  kan være vilkårlig. Se opgave 8.5, figur 8.5, opgave 8.30, og opgave 8.23.

1. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$  for kurven.
2. Bestem den tilhørende rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  for kurven.
3. Bestem akse-matricen  $\mathbf{\Omega}(t)$  og den associerede akse-vektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$  for kurven.
4. Bestem Frenet–Serret matricen  $\mathbf{\Xi}(t)$  for kurven ved at udregne produktet  $\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}'(t)$ , og sammenlign med de tidligere fundne udtryk for krumning  $\kappa(t)$  og torsion  $\tau(t)$  for vindellinjerne.

Læg mærke til, at Frenet–Serret matricen  $\Xi(t)$  og aksematricen  $\Omega(t)$  for rotationen givet ved Frenet–Serret rotationsmatricen  $\mathbf{R}(t)$  *ikke nødvendigvis* er den samme matrix, selv om de klart er i ’familie’ med hinanden i den forstand, at de begge er produkter af  $\mathbf{R}^*(t)$  og  $\mathbf{R}'(t)$ :

$$\begin{aligned}\Xi(t) &= \mathbf{R}^*(t) \cdot \mathbf{R}'(t) \\ \Omega(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \quad .\end{aligned}\tag{8.86}$$

De to matricer  $\Xi(t)$  og  $\Omega(t)$  er faktisk såkaldt **similære** for ethvert  $t$  via **similaritetstransformationen**  $\mathbf{R}(t)$  i den forstand, at

$$\mathbf{R}^{-1}(t) \cdot \Omega(t) \cdot \mathbf{R}(t) = \Xi(t) \quad .\tag{8.87}$$

Figur 8.19: Frenet–Serret styret bevægelse af basistetraederet langs ’vandret’ vindellinje. Se opgave 8.51. Animeret.

### ||| OPGAVE 8.51

Bemærk, at en af kantvektorerne i det markerende treben for det bevægede tetraeder i figur 8.19 har et spidspunkt, der ser ud til at bevæge sig langs  $y$ -aksen. Fodpunktskurven for Frenet–Serret bevægelsen af basistetraederet er givet ved forskriften:

$$\mathbf{p}(t) = (\cos(t/\sqrt{2}), t/\sqrt{2}, \sin(t/\sqrt{2})) \quad .\tag{8.88}$$

Vis, at den nævnte observation er korrekt for denne specielle vandrette helix, og bestem farten af den bevægelse af det nævnte spids-punkt på  $y$ -aksen.



## ||| Kapitel 9

# Medfølgende tetraederrum

I kapitel 7 har vi allerede undersøgt bevægelsen af punkter, der 'følger med' en given bevægelse af et tetraeder - for eksempel spidspunkterne for de tre kantvektorer  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{g}(t)$  i det roterede tetraeder. Placeringen af det roterede tetraeder er til ethvert tidspunkt  $t$  givet ved:

$$\begin{aligned}\boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \\ &= \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{9.1}$$

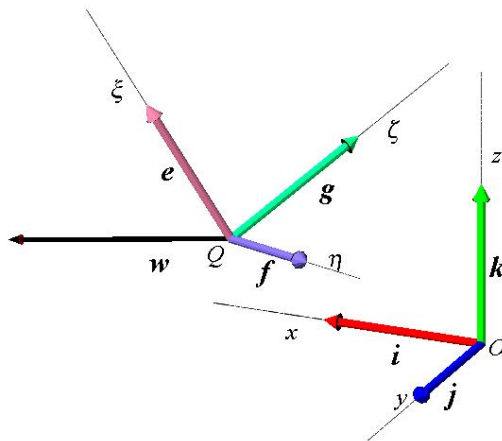
hvor  $\mathbf{R}(t)$  stadig betegner en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt  $t$  og  $\mathbf{p}(t)$  betegner den tidsparametriserede fodpunktskurve for tetraederet

||| **Bemærkning 9.1** Læg mærke til, at vi i dette kapitel igen 'fritstiller' både rotationsmatrixen og fodpunktskurven i forhold til hinanden i den forstand, at de ikke nødvendigvis er koblede som i forrige kapitel, hvor tetraederet og dermed  $\mathbf{R}(t)$  blev styret direkte ud fra fodpunktskurvens geometri via Frenet–Serret basen.

## 9.1 Koordinat- og basis-skift

Et objekt, der er *fast monteret* på - eller i - det bevægede tetraeder  $\boxtimes(t)$  har til ethvert tidspunkt en position i rummet, som selvsagt er direkte bestemt af tetraederets position i rummet. Positionen er altså direkte bestemt ud fra fodpunktskurven og de tre kantvektorer. Vi skal blot derudover beskrive præcist *hvordan* objektet er nagelfast placeret på - eller i - tetraederet.

Vi betragter et punkt på et **fræseværktøj**, f.eks. centerpunktet for et kugleformet **fræsehoved**, som er monteret på enden af en stålaksel, der er fast monteret på tetraederet  $\boxtimes(t)$  således at akslens andet endepunkt hele tiden er i fodpunktet  $p(t)$ . Så kan vi repræsentere stålakslen med en vektor  $\mathbf{w}(t)$ , der til ethvert tidspunkt har fodpunkt i  $p(t)$  og spidspunkt i fræsehovedets centerpunkt. Den



Figur 9.1: Koordinatsystemerne  $\{Q, \xi, \eta, \zeta\}$  og  $\{O, x, y, z\}$  med tilhørende basisvektorer  $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$  og  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  samt en vektor  $\mathbf{w}$  med fodpunkt i  $Q$ .

vektor har faste koordinater i forhold tetraederet, dvs. i forhold til  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$ . Det vil sige, at der findes 3 konstanter,  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , og  $\tilde{w}_3$  således at

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad . \quad (9.2)$$

Det er vigtigt at lægge mærke til, at på grund af den nagelfaste placering af  $\mathbf{w}(t)$  i  $\mathbb{X}(t)$  så er de tre koordinater  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , og  $\tilde{w}_3$  konstante, uafhængige af tiden  $t$ . Da de tre kantvektorer  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$  til ethvert tidspunkt er ortogonale enhedsvektorer, idet  $\mathbf{R}(t)$  er en rotationsmatrix, så kan konstanterne findes ved almindelig retvinklet projektion af  $\mathbf{w}$  på kantvektorerne, altså ved prikprodukterne

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{e}(t) &= (\tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{e}(t) = \tilde{w}_1 \\ \mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{f}(t) &= (\tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{f}(t) = \tilde{w}_2 \\ \mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{g}(t) &= (\tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}(t) = \tilde{w}_3 \quad . \end{aligned} \quad (9.3)$$

Vektoren  $\mathbf{w}$  har i den forstand *koordinaterne*  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$  med hensyn til de nye basisvektorer  $\mathbf{e}(t)$ ,  $\mathbf{f}(t)$ , og  $\mathbf{g}(t)$ . Og med opstillingen ovenfor er  $\mathbf{w}$  stedvektor ud fra fodpunktet  $p(t)$  til det spidspunkt der er givet ved centret af fræsehovedet. Til ethvert tidspunkt  $t_0$  har vi dermed defineret et nyt koordinatsystem,  $\{Q, \xi, \eta, \zeta\}$  med de nye basisvektorer i akseretningerne  $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\} = \{\mathbf{e}(t_0), \mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0)\}$  og  $Q = p(t_0)$ , se figur 9.1.

Herefter kan vi *ikke bare skrive* en vektors koordinater således  $\mathbf{w} = (1, 2, 7)$  uden at præcisere hvilket af de to koordinatsystemer  $\{Q, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$  eller  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , der refereres til. Hvis  $\mathbf{w} = \tilde{w}_1 \mathbf{e} + \tilde{w}_2 \mathbf{f} + \tilde{w}_3 \mathbf{g}$ , så har  $\mathbf{w}$  koordinaterne  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$  med hensyn til den nye basis  $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$  og det er sædvanligvis *ikke* koordinaterne for  $\mathbf{w}$  med hensyn til den gamle basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .



Med hensyn til den gamle basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  har vi stadigvæk koordinaterne (uden  $\tilde{\phantom{x}}$ )  $(w_1, w_2, w_3)$  for  $\mathbf{w}$ :

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k} \quad . \quad (9.4)$$

Vi bliver således nødt til at markere, hvilken basis vi bruger når vi skriver og bruger koordinater for vektorer. Det gør vi med index  $G$  på **gamle koordinater** og index  $N$  på **nye koordinater** således:

$$\mathbf{w} = \tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)_N$$

$$\mathbf{w}^* = \tilde{w}_1\mathbf{e}^* + \tilde{w}_2\mathbf{f}^* + \tilde{w}_3\mathbf{g}^* = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \quad (9.5)$$

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k} = (w_1, w_2, w_3)_G$$

$$\mathbf{w}^* = w_1\mathbf{i}^* + w_2\mathbf{j}^* + w_3\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad .$$

Vi vil nu finde sammenhængen mellem de to koordinatsæt for  $\mathbf{w}$ . Der må nødvendigvis være en eller anden sammenhæng, da de jo er koordinatsæt for den samme vektor.

Vi bruger, at  $\mathbf{e}$  er den vektor, der med hensyn til den gamle basis  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  har præcis de koordinater som står i rotationsmatricens første søjle, og tilsvarende for  $\mathbf{f}$  og  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^* &= \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{f}^* &= \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{g}^* &= \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \quad . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Ved indsættelse i (9.5) får vi så:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1 \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_2 \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_3 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \\
 &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \\
 &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G,
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

hvor det sidste lighedstegn stammer direkte fra sidste ligning i (9.5).

Vi har derfor følgende generelle sammenhæng mellem de to koordinatsæt for samme vektor  $\mathbf{w}$  udtrykt i de to baser:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G. \tag{9.8}$$

|||| **Bemærkning 9.2** Læg mærke til, at vi har brugt både tilde og index  $N$  til at markere nye koordinater og ingen tilde sammen med index  $G$  til at markere gamle koordinater. Resultatet er så, at de gamle koordinater for en vektor  $\mathbf{w}$  kan bestemmes ved at gange  $\mathbf{R}$ -matricen på de nye koordinater for  $\mathbf{w}$ . Bemærk også, at der jo stadigvæk i  $\mathbf{R}$ -matricen står de gamle koordinater for de nye basis-vektorer! Prøv for eksempel at finde de gamle koordinater for den nye første basis-vektor, der jo har de nye koordinater  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3) = (1, 0, 0)_N$ .

Omvendt har vi også direkte fra (9.8) ved at gange med  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$  på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G^* \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G, \tag{9.9}$$

således at de nye koordinater for  $\mathbf{w}$  kan bestemmes ved at gange den transponerede af rotationsmatricen på de gamle koordinater for  $\mathbf{w}$ .

### OPGAVE 9.3

Lad  $\mathbf{R}$  betegne rotationsmatricen  $\mathbf{R}_z(t_0)$  for en fast valgt værdi af  $t_0 \in \mathbb{R}$  og lad  $N = \{\mathbf{e}(t_0), \mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0)\}$  betegne den dertil hørende nye basis.

1. Bestem de nye koordinater  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$  for de vektorer  $\mathbf{w}$ , der har de gamle koordinater (med hensyn til  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ) henholdsvis:  $(1, 0, 0)_G$ ,  $(0, 1, 0)_G$ ,  $(0, 0, 1)_G$ , og  $(1, 2, 3)_G$ .
2. Bestem de gamle koordinater for de vektorer  $\mathbf{w}$ , der har de nye koordinater henholdsvis:  $(1, 0, 0)_N$ ,  $(0, 1, 0)_N$ ,  $(0, 0, 1)_N$ , og  $(1, 2, 3)_N$ .

Med de to baser  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  og  $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$  til rådighed i rummet kan vi beskrive lineære afbildninger fra  $\mathbb{R}^3$  ind i  $\mathbb{R}^3$  ved hjælp af hver enkelt af de to baser: En given lineær afbildning kan jo udtrykkes ved hjælp af en afbildningsmatrix dels med hensyn til den gamle basis og dels med hensyn til den nye basis.

Lad os antage, at  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  er en given lineær afbildning. Så gælder der for enhver vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  at billed-vektoren  $\mathcal{A}(\mathbf{w})$  kan skrives på to måder:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}) &= \mathcal{A}(w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}) \\ &= w_1\mathcal{A}(\mathbf{i}) + w_2\mathcal{A}(\mathbf{j}) + w_3\mathcal{A}(\mathbf{k}) \quad , \end{aligned} \quad (9.10)$$

og tilsvarende

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{w}) &= \mathcal{A}(\tilde{w}_1\mathbf{e} + \tilde{w}_2\mathbf{f} + \tilde{w}_3\mathbf{g}) \\ &= \tilde{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{e}) + \tilde{w}_2\mathcal{A}(\mathbf{f}) + \tilde{w}_3\mathcal{A}(\mathbf{g}) \quad . \end{aligned} \quad (9.11)$$

Det betyder præcis at der gælder følgende for alle  $\mathbf{w}$ :

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))^* = [ (\mathcal{A}(\mathbf{i}))^* \quad (\mathcal{A}(\mathbf{j}))^* \quad (\mathcal{A}(\mathbf{k}))^* ] \mathbf{w}^* \quad , \quad (9.12)$$

så hvis vi lader  $\mathbf{A}_G$  betegne matricen for  $\mathcal{A}$  med hensyn til den gamle basis får vi

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))_G^* = \mathbf{A}_G \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G = \mathbf{A}_G \mathbf{w}_G^* \quad (9.13)$$

og tilsvarende når vi lader  $\mathbf{A}_N$  betegne matricen for  $\mathcal{A}$  med hensyn til den nye basis:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{w}))_N^* = \mathbf{A}_N \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \mathbf{A}_N \mathbf{w}_N^* \quad . \quad (9.14)$$

Men heraf følger så af (9.8) og (9.9):

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}(\mathbf{w}))_N^* &= \mathbf{R}^* (\mathcal{A}(\mathbf{w}))_G^* \\
 &= \mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \mathbf{w}_G^* \\
 &= (\mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \mathbf{R}) \mathbf{w}_N^* \\
 &= \mathbf{A}_N \mathbf{w}_N^* \quad .
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

Da dette holder for alle vektorer  $\mathbf{w}$  må derfor gælde:

$$\mathbf{R}^* \mathbf{A}_G \mathbf{R} = \mathbf{A}_N \quad . \tag{9.16}$$

De to afbildningsmatricer  $\mathbf{A}_G$  og  $\mathbf{A}_N$  for afbildningen  $\mathcal{A}$  med hensyn til henholdsvis den gamle og den nye basis siges at være **similære** med hensyn til basisskiftmatricen  $\mathbf{R}$ .

## 9.2 Hastighedsfeltet for det medfølgende rum

Vi betragter nu igen (ligesom i kapitel 7, afsnit 7.5) et punkt  $q(t)$ , der bevæger sig sammen med tetraederet

$$\begin{aligned}
 \boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\
 &= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad ,
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

idet vi her dog *ikke vil indskrænke os* til kun at betragte hjørnepunkterne i tetraederet.

Vi betragter altså nu et vilkårligt punkt  $q(t)$ , som er fast i forhold til tetraederet og som derfor har faste tidsafhængige koordinater med hensyn til det nye koordinatsystem. Det vil sige, at stedvektoren  $\mathbf{q}(t)$  fra Origo  $O$  i det gamle koordinatsystem til punktet  $q(t)$  er summen:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t) \quad , \tag{9.18}$$

hvor  $\mathbf{p}(t)$  (som tidligere) er vektoren fra  $O$  til det nye koordinatsystems Origo  $Q(t) = p(t)$ , og hvor  $\mathbf{w}(t)$  er vektoren fra  $p(t)$  til  $q(t)$ . Den sidstnævnte har så *faste tidsafhængige koordinater*  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$  med hensyn til den nye basis  $\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$ :

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad , \tag{9.19}$$

således at

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad . \tag{9.20}$$

Punktet  $q(t)$  bevæger sig ikke i det medfølgende nye koordinatsystem hvor det har konstante koordinater, men  $q(t)$  bevæger sig (muligvis og typisk) i det faste gamle koordinatsystem.

Vi vil undersøge hastigheden af den bevægelse til ethvert tidspunkt i det faste gamle koordinatsystem. Vi må forvente, at bevægelsen afhænger både af fodpunkt-bevægelsen  $p(t)$  og af

rotationsmatricerne  $\mathbf{R}(t)$ . Ved at differentiere (9.20) med hensyn til  $t$  får vi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}'(t) &= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}'(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}'(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}'(t) \\
 &= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t) \\
 &= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_1 \mathbf{e}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_2 \mathbf{f}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_3 \mathbf{g}(t)) \\
 &= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{w}(t) \\
 &= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \quad ,
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

hvor vi har benyttet (7.37) fra kapitel 7 og den ud fra  $\mathbf{R}(t)$  bestemte aksevektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Da valget af det faste punkt  $q(t)$  i det medfølgende nye koordinatsystem var helt generelt og givet ved punktets faste koordinater  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$  i det nye system, så kan vi nu ved hjælp af (9.21) til ethvert tidspunkt bestemme den øjeblikkelige hastighed af *ethvert punkt*, der er fast monteret i det rum, der følger med tetraederet. Vi skal blot kende punktets faste koordinatsæt i dette medfølgende **tetraeder-rum** samt fodpunktets hastighedsvektor  $\mathbf{p}'(t)$  og rotationsmatricens øjeblikkelige akse-vektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

Med andre ord: Vi kender nu bevægelsen, ikke blot af selve tetraederet  $\boxtimes(t)$  og dets hjørnepunkter, men også bevægelsen af ethvert punkt i hele det rum, der er *fast monteret på tetraederet*.

Vi har dermed:

|||| **Sætning 9.4** Lad  $\boxtimes(t)$  betegne en bevægelse af et tetraeder:

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \tag{9.22}$$

hvor  $\mathbf{R}(t)$  angiver en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt  $t$  med akse-vektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Det til denne bevægelse hørende **øjeblikkelige hastighedsfelt** til tidspunktet  $t_0$  er så givet ved følgende vektor i det vilkårligt givne punkt i rummet, der har stedvektoren  $\mathbf{q}$  (ud fra det gamle faste Origo,  $O$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{q}'(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{w}(t_0) \\
 &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \quad .
 \end{aligned} \tag{9.23}$$

|||| **Bemærkning 9.5** Med andre ord: Til ethvert tidspunkt og til ethvert givet punkt i rummet har vi dermed knyttet en vektor, nemlig den hastighed som punktet har på det tidspunkt hvis det følger fast med i hele tetraeder-rummets bevægelse, sådan som den bevægelse er fastlagt af  $\boxtimes(t)$ .

Figur 9.2: En tetraeder-bevægelse langs en cirkel og det tilhørende øjeblikkelige hastigheds-vektorfelt  $\mathbf{V}_q(t_0)$  for enhver værdi af  $t \in [0, 2\pi]$ , se eksempel 9.6. Animeret.

### Eksempel 9.6

En roterende bevægelse af et standard tetraeder er givet ved en parametriseret fodpunktskurve (i dette tilfælde en cirkel) og en tidsafhængig rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$ , der er et produkt af to akserotationsmatricer som følger, hvor parameteren er  $t \in [0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G . \end{aligned} \quad (9.24)$$

Vi bestemmer først aksematricen  $\mathbf{\Omega}(t)$  og aksevektoren  $\boldsymbol{\omega}(t)$  til ethvert tidspunkt  $t$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sin(t) \\ 1 & 0 & -\cos(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{bmatrix}_G \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G . \end{aligned} \quad (9.25)$$

Ud fra disse ingredienser finder vi det øjeblikkelige hastighedsfelt for ethvert punkt  $q = (q_1, q_2, q_3)_G$ , se opgave 9.7:

$$\mathbf{V}_q(t) = (-q_2 + (q_3 - 1)\sin(t), q_1 - (q_3 - 1)\cos(t), (q_2 - \sin(t))\cos(t) - (q_1 - \cos(t))\sin(t))_G .$$

Se figur 9.2, hvor hastighedsfeltet (og tetraeder-bevægelsen) er vist i animation over det givne  $t$ -interval,  $t \in [0, 2\pi]$ .

### OPGAVE 9.7

Eftervis de angivne udtryk i eksempel 9.6 - især det sidste, dvs. udtrykket for det øjeblikkelige hastighedsfelt for den angivne bevægelse af tetraederrummet.

### OPGAVE 9.8

Bestem tilsvarende udtryk som i eksempel 9.6, men nu ud fra følgende – lidt simple – data for bevægelsen af tetraederrummet:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (t, t, 1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad .\end{aligned}\tag{9.26}$$

## 9.3 Karakterisering af hastighedsfeltet

Der er to hovedtilfælde for det øjeblikkelige hastighedsfelt for en bevægelse af tetraederrummet til et givet tidspunkt  $t_0$ . Vi antager som ovenfor, at bevægelsen er givet på følgende måde, hvor  $\mathbf{R}(t)$  som sædvanlig betegner en tidsafhængig rotationsmatrix og  $\mathbf{p}(t)$  betegner en tidsparametriseret fodpunktskurve:

$$\mathfrak{x}(t) = \mathbf{R}(t) \mathfrak{x}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad .\tag{9.27}$$

Det afgørende er, om den ud fra  $\mathbf{R}(t)$  bestemte akse-vektor (til det givne tidspunkt)  $\boldsymbol{\omega}(t_0)$  er nul-vektoren eller ikke:

### 9.3.1 Øjeblikkelig parallelforskydning

Hvis  $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$  er hastighedsfeltet simpelthen ifølge (9.23):

$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) \quad ,\tag{9.28}$$

således at *alle* punkter  $q$  i hele rummet har *samme* hastighedsvektor til det betragtede tidspunkt  $t_0$ . Der er altså tale om en **øjeblikkelig parallelforskydning** (**øjeblikkelig translation**) i den retning og med den fart, som er givet ved tetraederfodpunktets hastighed  $\mathbf{p}'(t_0)$  til det tidspunkt. Hvis specielt  $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$  siger vi, at alle punkter i hele rummet er i **øjeblikkelig hvile** til tidspunktet  $t_0$ .

### 9.3.2 Øjeblikkelig skrue-bevægelse

Hvis  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$  er en fast valgt vektor i rummet, kan vi definere en ret linje i rummet med retningsvektoren  $\boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$  på følgende måde, hvor parameteren er  $u$  og  $\mathbf{r}_0$  er stedvektoren til et fast punkt

i rummet:

$$\mathcal{L} : \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \quad (9.29)$$

Figur 9.3: Lodrette tetraeder-bevægelser langs henholdsvis en cirkel og en vindellinje, begge med tilhørende øjeblikkelige skrue-akser samt hastighedsfelter for enhver værdi af  $t \in [0, 2\pi]$ . Animeret.

|||| **Sætning 9.9** Vi ser på en speciel bevægelse af tetraederrummet beskrevet ved  $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$  som ovenfor men her med *konstant akse-vektor*  $\boldsymbol{\omega}$  og en fodpunktsbevægelse med *konstant hastighedsvektor*  $h\boldsymbol{\omega}$  på linjen  $\mathcal{L}$ :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + ht\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R} \quad . \quad (9.30)$$

Denne bevægelse giver anledning til følgende hastighedsfelt i rummet:

$$\mathbf{V}_q = h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}(0)) \quad . \quad (9.31)$$

*Bevis.* Vi indsætter  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + ht\boldsymbol{\omega}$  i (9.23) og får som ønsket til ethvert tidspunkt  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0 - ht_0\boldsymbol{\omega}) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \quad (9.32)$$





||| **Definition 9.10** Enhver bevægelse af et tetraederrum, der til et givet tidspunkt  $t_0$  giver anledning til et hastighedsfelt af formen (9.31) vil vi kalde en **øjeblikkelig skrue-bevægelse** med den rette linje  $\mathcal{L}$  som **øjeblikkelig skrue-akse**, **øjeblikkelig vinkelhastighed**  $\boldsymbol{\omega}$  og **øjeblikkelig reduceret skrue-højde** (pitch)  $h$ . Betegnelsen *øjeblikkelig* betyder selvfølgelig, at skrue-aksen, vinkelhastigheden, og den reducerede skruehøjde alle afhænger af tidspunktet og jo ikke nødvendigvis er konstante.

De betegnelser er helt rimelige. Lad os se på et eksempel:

### ||| Eksempel 9.11

Med udgangspunkt i akserotationsmatricen  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$ , der har tilhørende akse-vektor  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)_G$ , og ved valg af fodpunktskurven  $p(t) = (0, 0, ht)_G$ , hvor  $h$  er en konstant, får vi

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + (0, 0, ht)_G \\ &= \boxtimes((0, 0, ht)_G, \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \end{aligned} \quad (9.33)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= (0, 0, 1)_G \\ \mathbf{e}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)_G \\ \mathbf{f}(t) &= (-\sin(t), \cos(t), 0)_G. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Hvis vi nu betragter et punkt  $q(t)$  med faste koordinater  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)_N$  i det bevægede tetraedersystem får vi stedvektoren  $\mathbf{q}(t)$  fra  $O$  til  $q(t)$ :

$$\mathbf{q}(t) = (0, 0, ht)_G + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad , \quad (9.35)$$

således at

$$\mathbf{q}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{bmatrix}_G \quad . \quad (9.36)$$

Dette er en rotation med vinkel  $t$  af vektoren  $\mathbf{w}$  omkring  $z$ -aksen efterfulgt af en parallelforskydning i  $z$ -akseretningen med vektoren  $(0, 0, ht)_G$  - altså en skrue-bevægelse. Endnu mere konkret kan vi eksempelvis betragte punktet  $(1, 0, 0)_N$  i det medfølgende tetraederrum. Det punkt vil gennemløbe følgende punkter, beskrevet med koordinaterne i det gamle koordinatsystem:

$$\mathbf{q}(t) = (0, 0, ht)_G + \mathbf{e}(t) = (\cos(t), \sin(t), ht)_G \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R} \quad , \quad (9.37)$$

hvilket netop er en parameterfremstilling for en helix - som er højreskruet hvis  $h > 0$ , venstreskruet hvis  $h < 0$  og som er udartet til en cirkel hvis  $h = 0$ , jvf. opgave 8.5 i kapitel 8.

### OPGAVE 9.12

I forlængelse af ovenstående eksempel 9.11: Find de kurver, som gennemløbes af punkterne  $(0, 1, 0)_N$ ,  $(0, 0, 1)_N$  og  $(1, 2, 3)_N$  i løbet af skruebevægelsen.

## 9.4 Hovedresultat for roterende bevægelser

Vi kan nu formulere og vise hovedsætningen for roterende bevægelser i rummet. Vi antager, at  $\boldsymbol{\omega}(t_0) \neq \mathbf{0}$  sådan at der virkelig er tale om en egentlig rotation. (Hvis  $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$  er sagen allerede klar; så er der tale om en øjeblikkelig parallelforskydning, se 9.3.1 ovenfor.)

**Sætning 9.13** Lad  $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$  betegne en egentlig roterende bevægelse af basistetraederet langs en given fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$ . Vi antager altså, at  $\boldsymbol{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$  for alle  $t$ .

Så findes der til ethvert tidspunkt  $t_0$  en entydigt bestemt ret linje  $\mathcal{L}(t_0)$  i rummet, nemlig

$$\mathcal{L}(t_0) : \mathbf{r}(u) = \left( \mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \right) + u \boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \quad (9.38)$$

således at den øjeblikkelige bevægelse af tetraederrummet til tidspunktet  $t_0$  er en skrue-bevægelse med  $\mathcal{L}(t_0)$  som skrue-akse og med reduceret skruehøjde  $h(t_0)$  som er givet ved

$$h(t_0) = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \cdot \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \quad . \quad (9.39)$$

Hvis  $h(t_0) = 0$  er der tale om en øjeblikkelig drejning omkring akse  $\mathcal{L}(t_0)$  til det givne tidspunkt  $t_0$ .

Det øjeblikkelige hastighedsfelt for bevægelsen af tetraederrummet på stedet  $\mathbf{q}$  er tilsvarende:

$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \quad (9.40)$$

**Definition 9.14** De ingredienser som udledes i sætning 9.13 til beskrivelse af den egentlige roterende bevægelse  $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$ , altså  $\mathcal{L}(t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , og  $h(t)$  vil vi her og i det følgende kalde bevægelsens **skrue-data** til tiden  $t$ .

*Bevis for sætning 9.13.* Vi skal blot vise, at det øjeblikkelige hastighedsfelt har form som i ligning (9.31). Vi lokaliserer først skrue-aksen i rummet, dvs. vi skal finde et eller flere punkt(er)  $q = r$

således at følgende ligning er opfyldt for en passende værdi af  $h(t_0)$ :

$$\mathbf{V}_r(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad . \quad (9.41)$$

Denne ligning er selvfølgelig ækvivalent med

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \quad (9.42)$$

Men den i påstanden angivne værdi af  $h(t_0)$  løser netop (9.42): Med præcis den værdi af  $h(t_0)$  er alle punkterne  $\mathbf{r}(u)$  på linjen  $\mathcal{L}(t_0)$  løsninger til (9.42). Se opgave 9.15 nedenfor. Vi sætter  $\mathbf{r}_0$  til at være det udpegede punkt

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \quad , \quad (9.43)$$

sådan at

$$\mathcal{L}(t_0) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \quad (9.44)$$

Med det  $\mathbf{r}_0$  har vi så også (per konstruktion) at (9.42) er opfyldt:

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \quad (9.45)$$

Heraf får vi

$$\mathbf{p}'(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad , \quad (9.46)$$

som ved indsættelse i (9.23) giver

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= (h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0))) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \quad (9.47)$$

Det vil sige, at vi sluttelig har følgende øjeblikkelige hastighedsfelt for den betragtede bevægelse:

$$\mathbf{V}_q(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad , \quad (9.48)$$

og det er netop i henhold til definition 9.10 en **øjeblikkelig skruebevægelse** omkring den påståede akse. Skruebevægelsen reducerer specielt til en **øjeblikkelig drejning** hvis  $h(t_0) = 0$ .  $\square$

### ||| OPGAVE 9.15

Vis, at ovenstående intermezzo i beviset for sætning 9.13 er OK, altså at: "Den i påstanden angivne værdi af  $h(t_0)$  løser netop (9.42): Med præcis den værdi af  $h(t_0)$  er alle punkterne  $\mathbf{r}(u)$  på linjen  $\mathcal{L}(t_0)$  løsninger til (9.42)."

Figur 9.4: Tetraeder-bevægelse langs cirkel, den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse samt hastighedsfeltet for enhver værdi af  $t \in [0, 2\pi]$ , se eksempel 9.16. Animeret.

### Eksempel 9.16

En bevægelse af tetraederrummet er givet ved udtrykkene for  $\mathbf{p}(t)$  og  $\mathbf{R}(t)$ , som er angivet i eksempel 9.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\ \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_x(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G . \end{aligned} \quad (9.49)$$

I det eksempel fandt vi, at aksevektoren for bevægelsen er

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)_G . \quad (9.50)$$

Bevægelsen af tetraederrummet har så følgende øjeblikkelige skrue-akse for enhver værdi af  $t$ :

$$\mathcal{L}(t) : \mathbf{r}(u) = (\cos(t)/2, \sin(t)/2, 3/2)_G + (u\cos(t), u\sin(t), u)_G , \quad u \in [0, 2\pi] \quad (9.51)$$

med reduceret skruehøjde  $h(t) = 0$ . Bemærk, at den øjeblikkelige skrueakse afhænger (kraftigt) af tidspunktet  $t$ . Se opgave 9.17 og figurene 9.4.

### OPGAVE 9.17

Vis, at den påståede skrue-akse i eksempel 9.16 er korrekt for enhver værdi af  $t$ , og ellers, at skruehøjden konstant er 0, således at der til ethvert tidspunkt er tale om en øjeblikkelig drejning omkring den øjeblikkelige skrue-akse.

### OPGAVE 9.18

Bestem skrue-akse og reduceret skruehøjde for ethvert  $t$  i det eksempel, der er defineret i opgave 9.8:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (t, t, 1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad .\end{aligned}\tag{9.52}$$

### OPGAVE 9.19

Bestem  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , det øjeblikkelige hastighedsfelt, den øjeblikkelige skrueakse, og den øjeblikkelige reducerede skruehøjde for enhver værdi af  $t \in \mathbb{R}$  ud fra følgende data for en bevægelse af tetraederrummet:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_x(2t) \quad .\end{aligned}\tag{9.53}$$

## 9.5 Frenet–Serret skrue-data

I dette afsnit vil vi se lidt nærmere på de specielle tetraederbevægelser, der er totalt styret af en given fodpunktskurve, nemlig Frenet–Serret styring ved hjælp af Frenet–Serret basen for en given regulær kurve  $\mathbf{p}(t)$  med positiv krumning som vi indførte og analyserede i kapitel 8, afsnit 8.6.

Vi vil her specielt undersøge hvordan *krumningen* og *torsionen* af fodpunktskurven indgår i beskrivelsen af skrue-data for Frenet–Serret styringen af et basistetraeder langs den givne fodpunktskurve.

**Sætning 9.20** Lad  $\mathbf{p}(t)$  betegne en regulær kurve i rummet med fart  $v(t)$ , krumning  $\kappa(t) > 0$ , torsion  $\tau(t)$ , og medfølgende *Frenet–Serret tetraeder*:

$$\boxtimes(t) = \boxtimes(\mathbf{p}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad .\tag{9.54}$$

Skrue-data for den derved definerede Frenet–Serret styring af  $\boxtimes(t)$  er da givet ved følgende udtryk for enhver given værdi af  $t$ :

$$\boldsymbol{\omega}(t) = v(t) \cdot \tau(t) \cdot \mathbf{e}(t) + v(t) \cdot \kappa(t) \cdot \mathbf{g}(t) \quad ,\tag{9.55}$$

$$h(t) = \frac{\tau(t)}{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} \quad , \quad \text{og} \quad (9.56)$$

$$\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \left( \mathbf{p}(t) + \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t) + \tau^2(t)} \cdot \mathbf{f}(t) \right) + u \cdot (\tau(t) \cdot \mathbf{e}(t) + \kappa(t) \cdot \mathbf{g}(t)) \quad . \quad (9.57)$$

*Bevis.* Vi ved allerede fra kapitel 8 at de gamle koordinater for  $\boldsymbol{\omega}$  er elementer i aksematrixen  $\boldsymbol{\Omega}$  som jo per definition er matrixen (mht. den gamle basis) for den lineære afbildning  $\mathbf{v} \mapsto \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ . De nye koordinater for  $\boldsymbol{\omega}$  (dvs. koordinaterne med hensyn til den nye basis  $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ ) fås derfor som de tilsvarende elementer i afbildningens matrix med hensyn til den nye basis, som er givet via basisskiftmatrixen  $\mathbf{R}$  på følgende vis – sammenlign med ligning (9.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R} &= \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}^*) \cdot \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^* \cdot (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{R}^*) \cdot \mathbf{R} \\ &= (\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}') \cdot (\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}) \\ &= (\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}') \cdot \mathbf{E} \\ &= \mathbf{E} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -v \cdot \kappa & 0 \\ v \cdot \kappa & 0 & -v \cdot \tau \\ 0 & v \cdot \tau & 0 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (9.58)$$

hvor  $v = v(t)$  betegner farten, længden af  $\mathbf{p}'(t)$ , i.e.  $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$ . Koordinaterne for  $\boldsymbol{\omega}$  med hensyn til  $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$  er derfor:

$$\boldsymbol{\omega} = v \cdot (\tau, 0, \kappa)_N \quad , \quad (9.59)$$

sådan at

$$\boldsymbol{\omega}(t) = v(t) \cdot (\tau(t) \cdot \mathbf{e}(t) + \kappa(t) \cdot \mathbf{g}(t)) \quad , \quad (9.60)$$

som påstået.

Dernæst får vi direkte:

$$\|\boldsymbol{\omega}(s)\|^2 = v^2(t) \cdot (\kappa^2(s) + \tau^2(s)) \quad , \quad (9.61)$$

og dermed følgende:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{p}'(t) &= (\tau(t) \cdot \mathbf{e}(t) + \kappa(t) \cdot \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{e}(t) = \tau(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t) &= (\tau(t) \cdot \mathbf{e}(t) + \kappa(t) \cdot \mathbf{g}(t)) \times \mathbf{e}(t) = \kappa(t) \cdot \mathbf{f}(t) \quad , \end{aligned} \quad (9.62)$$

som giver resten af de påståede skruedata ved indsættelse i definition 9.14. □

Figur 9.5: Frenet–Serret styring langs en vindellinje og den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse for enhver værdi af  $s \in [0, 2\pi]$ . Animeret.

### ||| OPGAVE 9.21

Lad  $\mathbf{p}(s)$  betegne følgende buelængdeparametriserede rumkurve (jvf. opgave 8.49 fra kapitel 8):

$$\mathbf{p}(s) = (3 \cos(s/5), 3 \sin(s/5), 4s/5) \quad , \quad s \in \mathbb{R} \quad . \quad (9.63)$$

Bestem skrue-data for Frenet–Serret styring langs  $\mathbf{p}(s)$  og angiv til ethvert tidspunkt det tilsvarende øjeblikkelige hastighedsfelt af det medfølgende tetraederrum.

## 9.6 Styring med givne skrue-data

Vi vil i dette afsnit se på den *omvendte problemstilling* i forhold til hovedresultatet i sætning 9.13, nemlig følgende:

Antag, at vi har fået oplyst en parameterfremstilling (med enheds-retningsvektor  $\mathbf{v}(t)$ ) for en ret linje  $\mathcal{L}(t)$  til ethvert tidspunkt  $t$ , samt to funktioner af tiden  $w(t)$  og  $h(t)$ . Antag også, at vi kender den præcise placering af et standard tetraeder i rummet til tiden  $t = 0$ , dvs. vi kender

$\boxtimes(0) = \mathbf{R}(0) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(0)$ , hvor altså  $\mathbf{R}(0)$  er en given rotationsmatrix og  $\mathbf{p}(0)$  er et givet fodpunkt i rummet. Kan vi så konstruere  $\mathbf{R}(t)$  og  $\mathbf{p}(t)$  til ethvert senere – og tidligere – tidspunkt sådan at den givne rette linje  $\mathcal{L}(t)$  til det tidspunkt netop bliver den øjeblikkelige skrue-akse for den øjeblikkelige skruebevægelse af  $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t)$  med øjeblikkelig akse-rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega} = w(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ ?

Svaret er ja, det kan vi! Og det er indholdet af følgende sætning, hvor vi gentager beskrivelsen af scenariet med lidt flere præcise detaljer:

||| **Sætning 9.22** Vi lader  $\mathcal{L}(t)$  betegne følgende familie af orienterede rette linjer i rummet:

$$\mathcal{L}(t) \quad : \quad \mathbf{r}(u) = \mathbf{q}(t) + u \cdot \mathbf{v}(t) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad (9.64)$$

hvor  $\mathbf{q}(t)$  er en parametriseret kurve i rummet, og hvor  $\mathbf{v}(t)$  er en enhedsvektor til ethvert tidspunkt  $t \in \mathbb{R}$ . Lad  $h(t)$  og  $w(t)$  betegne to givne funktioner af  $t$  og antag at  $w(t) > 0$  for alle  $t$ . Lad endelig  $p_0$  betegne et punkt i rummet med stedvektor  $\mathbf{p}_0$  og lad  $\mathbf{R}_0$  betegne en given rotationsmatrix.

Så findes der en entydigt bestemt parametriseret fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  med  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$  og en entydigt bestemt  $t$ -parametriseret familie af rotationsmatricer  $\mathbf{R}(t)$  med  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$  således at følgende roterende bevægelse af standard-tetraederrummet

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad (9.65)$$

netop har  $\mathcal{L}(t)$  som øjeblikkelig skrueakse,  $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \cdot \mathbf{v}(t)$  som øjeblikkelig aksevektor, og  $h(t)$  som øjeblikkelig reduceret skruehøjde.

*Bevis.* Vi skal løse to differentiallygningsystemer, dels et for  $\mathbf{p}(t)$  og dels et for  $\mathbf{R}(t)$  med begyndelsesbetingelserne  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$  og  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ . Men  $\mathbf{R}(t)$  bestemmes direkte ud fra  $\boldsymbol{\omega}(t)$  og  $\mathbf{R}(0)$  som i kapitel 7 afsnit 7.4.1 (se metoden og eksemplerne der og konkrete eksempler nedenfor).

Vi mangler derfor kun at bestemme fodpunktskurven  $\mathbf{p}(t)$ .

Fodpunktet  $\mathbf{p}(t)$  skal opfylde to krav som stammer direkte fra sætning 9.13: Det første krav er givet ved ligning (9.39):

$$\mathbf{p}'(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = h(t) \cdot \|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2 \quad , \quad (9.66)$$

som – efter division med  $w(t)$  på begge sider af lighedstegnet – er ækvivalent med:

$$\mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) = h(t) \cdot w(t) \quad . \quad (9.67)$$

Det andet krav er at til ethvert givet tidspunkt  $t$  skal det givne punkt  $\mathbf{q}(t)$  ligge på den givne linje



$\mathcal{L}(t)$ , dvs. i henhold til ligning (9.38):

$$\mathbf{q}(t) = \left( \mathbf{p}(t) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2} \right) + u \boldsymbol{\omega}(t) \quad (9.68)$$

for et passende valg af parameterværdi  $u \in \mathbf{R}$  (som gerne må afhænge af  $t$ ). Dvs. for ethvert tidspunkt  $t$  skal der findes en værdi af  $u$  således at

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{w(t)} + u \cdot w(t) \cdot \mathbf{v}(t) \quad . \quad (9.69)$$

Vi kan isolere den søgte værdi af  $u$  fra denne ligning ved at danne skalarprodukt med  $\mathbf{v}(t)$  på begge sider af lighedstegnet:

$$(\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = u \cdot w(t) \quad , \quad (9.70)$$

hvor vi har benyttet, at  $\mathbf{v}(t)$  jo er vinkelret på krydsproduktet  $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)$  og at  $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 1$  for alle  $t$ .

Heraf får vi så ved at indsætte  $u \cdot w(t) = (\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)$  tilbage i ligning (9.69):

$$\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{w(t)} + ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) \quad . \quad (9.71)$$

Ved at omskrive den ligning lidt får vi endelig:

$$\mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) = w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \quad (9.72)$$

Vi har dermed to ligninger til bestemmelse af  $\mathbf{p}(t)$  ud fra  $h(t)$ ,  $w(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  og  $\mathbf{q}(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ \mathbf{v}(t) \times \mathbf{p}'(t) &= w(t) \cdot ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) - ((\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)) \quad . \end{aligned} \quad (9.73)$$

Hvis vi skriver disse ligninger ud i koordinater, altså bruger  $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G$  osv. vil vi se (som i det simple eksempel nedenfor) at vi har ialt 4 koblede lineære første-ordens differentialligninger til bestemmelse af de 3 koordinatfunktioner for  $\mathbf{p}(t)$ .

Det betyder dog ikke, at differentialligningssystemet er overbestemt og derfor muligvis uden løsninger – hvad vi godt kunne frygte, fordi der jo er flere ligninger end ubekendte. Koefficientmatricen for det totale differentialligningssystem har netop rangen 3 (se opgaver og eksempler nedenfor) således at der for givne (passende pæne) koefficientdata  $h(t)$ ,  $w(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  og  $\mathbf{q}(t)$  findes præcis én løsning  $\mathbf{p}(t)$  til differentialligningssystemet (9.73) med den givne begyndelsesbetingelse  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ . Og det var det, vi skulle vise.  $\square$

Vi illustrerer påstanden om, at der generelt findes præcis én løsning til (9.73):

### Eksempel 9.23

Vi antager, at  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  = den sædvanlige tredje basisvektor i det (gamle) koordinatsystem for alle  $t$ . Så reducerer differentiaalligningssystemet i (9.73) til følgende – skrevet ud med koordinaterne for de respektive vektorfunktioner:

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= w(t) \cdot h(t) \\ p_2'(t) &= w(t) \cdot (p_1(t) - q_1(t)) \\ p_1'(t) &= w(t) \cdot (q_2(t) - p_2(t)) \quad , \end{aligned} \quad (9.74)$$

som netop har rangen 3 og en entydig løsning med  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$ . Bemærk, at 'krydsproduktligningen' i (9.73) kun giver anledning til 2 ligninger, der tilsammen redegør for hvordan  $\mathbf{p}(t)$  udvikler sig i det 2D-vektorrum, der er vinkelret på  $\mathbf{v} = \mathbf{k}$ .

### OPGAVE 9.24

Lad  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)_G$  betegne en given enhedsvektor i rummet og lad  $(*)$  betegne følgende ligningssystem for  $\mathbf{x} = (x, y, z)_G$ , hvor  $a$  er et reelt tal og hvor  $\mathbf{b}$  er en vektor der er vinkelret på  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= a \\ \mathbf{v} \times \mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad . \end{aligned} \quad (9.75)$$

Vis, at  $(*)$  kan skrives på formen  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^*$ , hvor  $\mathbf{A}$  er en  $(4 \times 3)$ -matrix og  $\mathbf{c}$  er en vektor. Vis dernæst, at  $(4 \times 4)$ -totalmatricen for dette lineære ligningssystem har rangen 3, således at der er netop én løsning  $\mathbf{x}$  til systemet.

### Eksempel 9.25

Med  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  som i ovenstående eksempel 9.23 og med  $h(t) = 0$ ,  $w(t) = 1$ ,  $\mathbf{q}(t) = (0, 0, 0)_G$  for alle  $t$  får vi:

$$\begin{aligned} p_3'(t) &= 0 \\ p_2'(t) &= p_1(t) \\ p_1'(t) &= -p_2(t) \quad , \end{aligned} \quad (9.76)$$

som har den fuldstændige løsning (med frie konstanter  $c_i$ ) (fås på samme måde som i eksempel 7.20 i Kapitel 7):

$$\begin{aligned} p_3(t) &= c_3 \\ p_2(t) &= c_1 \cdot \sin(t) + c_2 \cdot \cos(t) \\ p_1(t) &= c_1 \cdot \cos(t) - c_2 \cdot \sin(t) \quad . \end{aligned} \quad (9.77)$$

Hvis vi dernæst antager, at fodpunktet til tiden  $t = 0$  er givet ved  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = (1, 0, 0)_G$  får vi derfor følgende præcise fodpunktskurve til ethvert andet tidspunkt  $t$  – ved at indsætte  $t = 0$  i ovenstående ligninger og løse for  $c_1$ ,  $c_2$ , og  $c_3$ :

$$\begin{aligned} p_3(t) &= 0 \\ p_2(t) &= \sin(t) \\ p_1(t) &= \cos(t) \quad . \end{aligned} \quad (9.78)$$

Med fodpunktskurven på plads, mangler vi blot at konstruere rotationsmatricen  $\mathbf{R}(t)$  således at den netop til ethvert tidspunkt  $t$  har den ønskede aksevektor  $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  og iøvrigt tilfredsstillende begyndelsesbetingelsen, som vi her i dette eksempel vil antage er givet simpelt ved:  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$ .

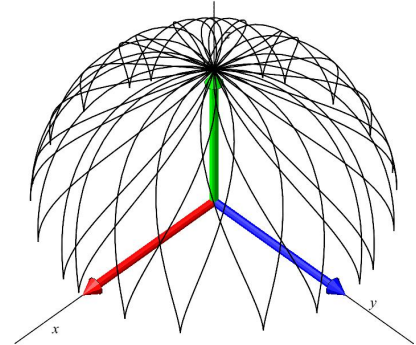
Konstruktionen af  $\mathbf{R}(t)$  foregår præcis som i eksempel 7.20 i kapitel 7. Hvis vi gennemgår proceduren derfra får vi følgende – ikke overraskende – resultat:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_z(t) \quad . \quad (9.79)$$

Vi kan altså konkludere, at i dette eksempel er det følgende entydigt givne tetraederbevægelse, der vil give anledning til de ønskede givne skrue-data inklusive de givne begyndelsesbetingelser (se animationen af bevægelsen samt det inducerede hastighedsvektorfelt i figur 9.6):

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \\ &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + (\cos(t), \sin(t), 0)_G \quad . \end{aligned} \quad (9.80)$$

Figur 9.6: Tetraederbevægelsen som er udviklet i eksemplerne 9.23 og 9.25. Animeret.



Figur 9.7: Tetraederbevægelsen som er givet via skrue-data i eksemplet 9.27. Animeret. Til højre ses (en del af) den kurve som tetraederets fodpunkt  $\mathbf{p}(t)$  gennemløber.

### OPGAVE 9.26

Bestem på samme måde som i eksempel 9.23 de tetraederbevægelser, der opfylder følgende skrue-data og begyndelsesbetingelser:

1.  $w(t) = 2$  ,  $h(t) = 0$  ,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  ,  $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$  ,  $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$  ,  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$
2.  $w(t) = 2$  ,  $h(t) = 1$  ,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  ,  $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$  ,  $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$  ,  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$
3.  $w(t) = 1$  ,  $h(t) = 0$  ,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  ,  $\mathbf{q}(t) = (0,1,0)_G$  ,  $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$  ,  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_x(\pi/4)$
4.  $w(t) = 1$  ,  $h(t) = 1$  ,  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{k}$  ,  $\mathbf{q}(t) = (0,1,0)_G$  ,  $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)_G$  ,  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_z(\pi/4)$

Ved at ændre ganske lidt på de simple skrue-data, som vi har betragtet ovenfor kan man let konstruere langt mere komplicerede tetraeder-bevægelser, som f.eks. illustreret med følgende eksempel og tilhørende opgave:

### Eksempel 9.27

I dette eksempel benyttes følgende skrue-data og begyndelsebetingelser:  $w(t) = 1$ ,  $h(t) = 0$ ,  $\mathbf{v}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)_G$ ,  $\mathbf{q}(t) = (0,0,0)_G$ ,  $\mathbf{p}(0) = (0,0,1)_G$ , og  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ . De resulterende ligninger (9.73) kan løses eksakt og løsningerne kan udtrykkes ved almindelige funktionstegn. Resultatet er vist i figur 9.7.

## ||| OPGAVE 9.28

Det synes at fremgå af figur 9.7, at den tetraederbevægelse, der er resultatet af skrue-data i eksempel 9.27, har en fodpunktskurve, der ligger helt indeholdt i en (halv-)kugleflade med radius 1 og centrum i Origo samt at farten af fodpunktskurven er 0 netop når fodpunktet rører  $(x,y)$ -planen. Kan du bevise, at de observationer er korrekte? Er fodpunktskurven en lukket kurve, der gennemløbes igen og igen når tiden går? Hvis ikke, betyder det så at alle punkter på halvkuglen bliver 'ramt' af fodpunktskurven på et eller andet tidspunkt?

## 9.7 Skruebevægelser med fast akse

De bevægelser af det medfølgende tetraederrum, som har konstant skrue-akse og en fodpunktbevægelse på denne faste akse, må formodes at være særligt simple. Vi antager først, at den faste akse er  $z$ -aksen, og giver i næste afsnit en præsentation af rotationer omkring en vilkårlig fast akse.

Figur 9.8: Tetraederbevægelse med fast akse og data  $f(t) = t$  og  $g(t) = t$ .

Når den faste akse er  $z$ -aksen får vi specielt fra hovedresultatet for roterende bevægelser, Sætning

9.13, at:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbf{r}(u) &= \left( \mathbf{p}(t) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2} \right) + u \boldsymbol{\omega}(t) \\ &= (0, 0, g(t) + u w(t)) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \quad t \in [0, T] \quad , \end{aligned} \quad (9.81)$$

hvor fodpunktbevægelsen  $\mathbf{p}(t)$  er antaget at foregå langs  $z$ -aksen, således at  $\mathbf{p}(t) = (0, 0, g(t))$  for en løfte-funktion  $g(t)$ , og hvor den aktuelle akse-vektor er parallel med  $z$ -aksen og givet ved  $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \mathbf{v}(t) = w(t) (0, 0, 1)$ .

Den reducerede skruehøjde er dermed:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{p}'(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2} \\ &= \frac{g'(t)}{w(t)} \quad , \quad \text{for alle } t \in [0, T] \quad . \end{aligned} \quad (9.82)$$

Da der er tale om en skruebevægelse omkring  $z$ -aksen må vi forvente, at den rotationsmatrix-funktion  $\mathbf{R}(t)$ , der definerer bevægelsen via udtrykket

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) \quad (9.83)$$

har følgende form:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(f(t)) \quad , \quad (9.84)$$

hvor drejningsvinklen er en passende funktion af tiden,  $f(t)$ .

At den forventning holder stik fås direkte af udregningen af rotationens aksematrix  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  og den tilhørende aksevektor  $\boldsymbol{\omega}(t)$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}^*(t) \\ &= \mathbf{R}'_z(f(t)) \cdot \mathbf{R}_z^*(f(t)) \\ &= \mathbf{R}'_z(f(t)) \cdot \mathbf{R}_z^*(f(t)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -f'(t) & 0 \\ f'(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (9.85)$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, f'(t)) \quad .$$

Det vil sige, at den afledede af drejningsvinklen er længden (med fortegn) af rotationens aksevektor. Den reducerede skruehøjde er således givet ved forholdet mellem de afledede af  $f$  og  $g$ :

$$h(t) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad , \quad \text{for alle } t \in [0, T] \quad . \quad (9.86)$$

I det specielle tilfælde i eksempel 9.11 er  $g(t) = ht$  og  $f(t) = t$  således at  $h(t) = h$  (med fortegn). Det eksempel er animeret i figur 9.8 (med  $h = 1$ ) hvori der også er monteret et gitter fast på det bevægede tetraeder for at vise den inducerede bevægelse af det medfølgende rum. Til sammenligning vises bevægelsen med data  $f(t) = 2\pi \sin^2(t)$  og  $g(t) = 2\pi \sin^2(t)$  i figur 9.9 nedenfor.

Figur 9.9: Tetraederbevægelse med fast akse og data  $f(t) = 2\pi \sin^2(t)$  og  $g(t) = 2\pi \sin^2(t)$ .

## 9.8 Rodrigues' formel

Når aksevektoren  $\boldsymbol{\omega}(t)$  har en konstant retning, som ikke nødvendigvis er  $(0, 0, 1)$  som ovenfor, så kan  $\mathbf{R}(t)$  stadig bestemmes direkte - det er lidt mere kompliceret, men Rodrigues' formel giver en færdig formel:

|||| **Sætning 9.29** Lad  $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v}$  være en given vektorfunktion hvor  $\mathbf{v}$  er en konstant enhedsvektor,  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Vi ønsker at konstruere den rotationsmatrix-funktion  $\mathbf{R}(t)$ , der har aksevektoren  $\boldsymbol{\omega}(t)$  og som starter med en given rotationsmatrix  $\mathbf{R}_0$ .

Lad  $\widehat{\Omega}(t)$  betegne den aksematrix, der har aksevektoren  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ :

$$\widehat{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3(t) & v_2(t) \\ v_3(t) & 0 & -v_1(t) \\ -v_2(t) & v_1(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (9.87)$$

Ud fra  $\widehat{\Omega}(t)$  konstrueres nu følgende matrix-funktion:

$$\mathbf{R}(t) = \left( \mathbf{E} + \sin(f(t))\widehat{\Omega}(t) + (1 - \cos(f(t)))\widehat{\Omega}^2(t) \right) \cdot \mathbf{R}_0 \quad , \quad (9.88)$$

hvor

$$f(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad . \quad (9.89)$$

Så er  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0$ , og den til  $\mathbf{R}(t)$  hørende akse-matrix er givet ved

$$\Omega(t) = w(t)\widehat{\Omega}(t) \quad . \quad (9.90)$$

Den tilsvarende akse-vektor er så netop

$$\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v} \quad , \quad (9.91)$$

som ønsket.

*Bevis.* Det følger via en direkte udregning af  $\Omega(t)$  ud fra den påståede  $\mathbf{R}(t)$ . □

### ||| Eksempel 9.30

Hvis  $\boldsymbol{\omega}(t) = w(t)\mathbf{v} = w(t)\mathbf{k} = (0, 0, w(t))$  og  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{E}$  får vi:

$$\widehat{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.92)$$

Ud fra  $\widehat{\Omega}(t)$  konstrueres nu følgende matrix-funktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} + \sin(f(t))\widehat{\Omega}(t) + (1 - \cos(f(t)))\widehat{\Omega}^2(t) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(f(t)) & -\sin(f(t)) & 0 \\ \sin(f(t)) & \cos(f(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_z(f(t)) \quad , \end{aligned} \quad (9.93)$$

hvor

$$f(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \quad . \quad (9.94)$$



Så er  $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ , og den til  $\mathbf{R}(t)$  hørende aksematrix er givet ved

$$\mathbf{\Omega}(t) = w(t) \widehat{\mathbf{\Omega}}(t) = f'(t) \widehat{\mathbf{\Omega}}(t) \quad (9.95)$$

og den tilsvarende akse vektor er så netop

$$\boldsymbol{\omega}(t) = w(t) \mathbf{v} = f'(t) (0,0,1) \quad , \quad (9.96)$$

som i ovenstående afsnit [9.7](#).



## ||| Kapitel 10

# Formning og design via Cosserat-sweeping

Ved hjælp af tetraederrummets bevægelse - med foreskrevne fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  og rotation  $\mathbf{R}(t)$  - kan vi nu **designe kurver, flader og rumlige områder** ved simpelthen at vælge en grundfigur, f.eks. et punkt, en kurve, eller en flade, som er givet (eventuelt i afhængighed af tiden  $t$ ) i tetraederrummet, og dernæst betragte den punktmængde, som i det faste koordinatsystem 'fejes ud' af den valgte figur når tetraederrummet udfører den givne bevægelse.

Denne form for design vil vi kalde **Cosserat-sweeping** fordi den er direkte inspireret af brødrene Eugene og François Cosserat's arbejder om elasticitetsteori fra begyndelsen af 1900-tallet, se [Wiki: Elastica](#) og referencerne der.

Fordelen ved denne design- og parametiserings-metode er, at de resulterende geometriske objekter i rummet automatisk bliver udstyret med parameterfremstillinger, som derefter kan bruges direkte til den videre analyse af deres geometriske egenskaber – som f.eks. bestemmelsen af længde, areal, volumen, krumninger, etc.

Det er vigtigt at bemærke, at vi kun har brug for ganske få **grund-objekter for at kunne bygge** en meget stor klasse af interessante resulterende geometriske strukturer:

1. En fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  – som jo iverd selv kan være frembragt af en forudgående Cosserat-sweeping i rummet.
2. En tidsafhængig rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  til styring af tetraederrummet langs med fodpunktskurven.
3. Et geometrisk objekt som er beskrevet ved en parameterfremstilling  $\mathbf{w}$  i det medfølgende tetraederrum – parat til bevægelse (og evt. samtidig deformation) langs fodpunktskurven. Typisk er  $\mathbf{w}$  parameterfremstillingen for et punkt, en kurve eller en flade i tetraederrummet. Igen kan det grundobjekt selv være resultatet af en forudgående Cosserat-sweeping i tetraederrummet. Og objektet kan selv være defineret tids-afhængig, dvs. selv ændre position og form i tetraederrummet.

Med andre ord har vi på denne måde mulighed for at konstruere og analysere en lang række af kurver, flader og områder i rummet ved at betragte dem som **ekstruderede objekter**, som formes ud fra simple, let beskrivelige objekter med lavere dimension, ved at disse så at sige 'trækkes' igennem rummet med en tetraeder-bevægelse givet ved en fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  og en tidsafhængig rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$ .



Metoden kan benyttes iterativt. For eksempel: Hvis en kurve  $\mathbf{q}(t)$  i rummet er frembragt ved Cosserat-sweeping med et punkt i tetraederrummet, der bevæges langs en given fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  med en given rotation  $\mathbf{R}(t)$  så kan  $\mathbf{q}(t)$  efterfølgende selv benyttes som en ny fodpunktskurve for en Cosserat-sweeping med det samme punkt i tetraederrummet og med den samme rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$ , osv. De resulterende kurver må forventes at være selv-similære og danne et mønster af kurver i rummet afhængig af den først valgte fodpunktskurve og tidsafhængige rotationsmatrix?

I dette kapitel vil vi kun se på nogle forholdsvis simple konstruktioner af denne type. Vi fokuserer mest på metoden i konstruktionerne og formgivning, og på opstillingen af de tilhørende parametriseringer.

## 10.1 Kurver

Cosserat sweeping med et fast punkt i tetraederrummet:

### Eksempel 10.1

Hvis vi betragter punktet  $q(t)$  med stedvektorfunktionen  $\mathbf{q}(t)$  med fodpunkt i det gamle origo  $O$  som i 9.2, ligning (9.18), så gennemløber dette punkt en kurve, som er givet ved:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad , \quad (10.1)$$

hvor  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , og  $\tilde{w}_3$  betegner de (i dette tilfælde) faste koordinater for stedvektoren  $\mathbf{w}$  fra det nye Origo  $Q = p(t)$  til punktet  $q(t)$  med hensyn til de nye basisvektorer  $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ . Vi kan derfor skrive stedvektorens gamle koordinater på følgende måde:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_G(t) &= (q_1(t), q_2(t), q_3(t))_G \\ &= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G + \tilde{w}_1 \cdot (e_1(t), e_2(t), e_3(t))_G \\ &\quad + \tilde{w}_2 \cdot (f_1(t), f_2(t), f_3(t))_G \\ &\quad + \tilde{w}_3 \cdot (g_1(t), g_2(t), g_3(t))_G \\ &= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{e}_G^*(t) & \mathbf{f}_G^*(t) & \mathbf{g}_G^*(t) \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \right)^* \\ &= \mathbf{p}_G(t) + (\mathbf{R}_G(t) \mathbf{w}_N^*)^* \quad , \end{aligned} \quad (10.2)$$

hvor vi benytter, at  $\mathbf{R}_G(t) \mathbf{w}_N^* = \mathbf{w}_G^*$ . Se ligning (9.8) i kapitel 9.

Læg mærke til den dobbelte brug af transponeringen  $(\cdot)^*$  i ovenstående. De benyttes sådan at typerne i matrixproduktet og i ligningen passer sammen. En vektor  $\mathbf{a}$  har f.eks. koordinaterne  $(a_1, a_2, a_3)_G$  med hensyn til den gamle basis og dermed den tilhørende **koordinat-søjle-matrix**:



$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= (a_1, a_2, a_3)_G \\ \mathbf{a}_G^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_G \end{aligned} \quad (10.3)$$

Så er

$$(\mathbf{a}_G^*)^* = (a_1, a_2, a_3)_G = \mathbf{a}_G \quad (10.4)$$

Her er et eksempel på brug af ovenstående metode til fremstilling af en Cosserat-sweeping med et punkt i rummet:

### ||| Eksempel 10.2

Vi vil finde den eksplicitte parameterfremstilling for den kurve, der gennemløbes af punktet  $q(t)$  som konstrueres i (10.1), og som vises i figur 10.1:

$$\mathbf{p}_G(t) = (0, 0, t)_G \quad , \quad t \in [0, T]$$

$$\mathbf{R}_G(t) = \mathbf{R}_z(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_G^*(t) & \mathbf{f}_G^*(t) & \mathbf{g}_G^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \quad , \quad t \in [0, 3\pi] \quad (10.5)$$

$$\mathbf{w}_N = (1, 1, 1)_N \quad .$$

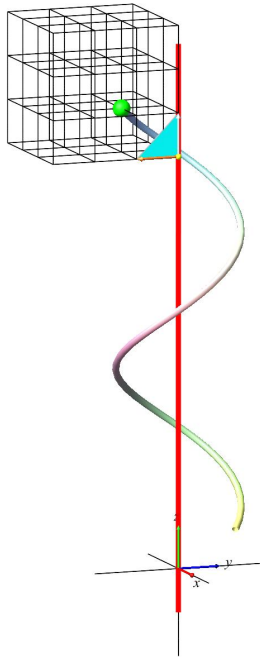
Med de ingredienser får vi (med alle detaljer og garneringer i udredningen) følgende parameterfremstilling for  $\mathbf{q}_G(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_G(t) &= \mathbf{p}_G(t) + \mathbf{w}_G \\ &= (0, 0, t)_G + 1 \cdot \mathbf{e}_G(t) + 1 \cdot \mathbf{f}_G(t) + 1 \cdot \mathbf{g}_G(t) \\ &= (0, 0, t)_G + \left( \mathbf{R}_G(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_N \right)^* \\ &= (0, 0, t)_G + \left( \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_N \right)^* \\ &= (0, 0, t)_G + \left( \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}_G \right)^* \\ &= (0, 0, t)_G + (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1)_G \\ &= (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), t + 1)_G \quad . \end{aligned} \quad (10.6)$$

Ud fra de meget simple ingredienser, fodpunktskurven  $(0,0,t)_G$  og rotationsmatricen  $\mathbf{R}_z(t)$  har vi konstrueret parameterfremstillingen for den resulterende Cosserat-sweep-kuve:

$$\mathbf{q}_G(t) = (\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), t + 1)_G \quad , \quad t \in [0, 3\pi] \quad . \quad (10.7)$$

Den tilhørende animerede Cosserat-sweeping – i dette tilfælde en af de velkendte vindellinjer – er illustreret i figur 10.1.



Figur 10.1: Cosserat-sweeping med punkt som grundobjekt i tetraederrummet og med en rotation af tetraederrummet omkring  $z$ -aksen. Det giver en vindellinje. Se eksempel 10.2. Bemærk: startpunktet for vindellinjen er  $(1, 1, 1)$ . Animeret.



Nogle helt naturlige første spørgsmål er nu, med reference dels til indledningen og dels til ovenstående eksempel: Hvor lang er kurven, hvad er krumningen og torsionen af kurven, og hvordan afhænger kurven og disse størrelser af de ingredienser, den er konstrueret ud fra, altså i dette tilfælde  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$ , og  $\mathbf{w}$ ? Men hvis rotationen  $\mathbf{R}(t)$  i Cosserat-konstruktionen ikke er koblet direkte til fodpunktskurven – f.eks. via Frenet-Serret basen som i eksempel 10.3 nedenfor – kan vi ikke sige noget generelt om hvordan den udføjede kurve afhænger af Cosserat-ingredienterne. Generelt kan en given kurve i rummet konstrueres på uendelig mange måder ved Cosserat-sweeping hvis vi selv kan vælge ingredienserne  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{w}$ , og  $\mathbf{R}(t)$ .

### Eksempel 10.3

Hvis vi – i forlængelse af eksempel 10.1 – antager, at den benyttede rotationsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  er Frenet–Serret rotationsmatricen for den regulære fodpunktskurve  $\mathbf{p}(t)$  med farten  $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\|$  og positiv krumning  $\kappa(t) > 0$  får vi:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}'_G(t) &= \mathbf{p}'_G(t) + (\mathbf{R}'_G(t)\mathbf{w}_N^*)^* \\
 &= v(t)\mathbf{e}_G(t) + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{e}^*(t) & \mathbf{f}^*(t) & \mathbf{g}^*(t) \end{bmatrix}_G \mathbf{w}_N^* \right)^* \\
 &= v(t)\mathbf{e}_G(t) + (\tilde{w}_1\mathbf{e}_G^*(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}_G^*(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}_G^*(t))^* \\
 &= v(t)\mathbf{e}_G(t) + \tilde{w}_1\mathbf{e}'_G(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}'_G(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}'_G(t) \\
 &= v(t)\mathbf{e}_G(t) + \tilde{w}_1v(t)\kappa(t)\mathbf{f}_G + \tilde{w}_2(-v(t)\kappa(t)\mathbf{e}_G(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}_G(t)) + \tilde{w}_3(-v(t)\tau(t)\mathbf{f}_G) \\
 &= v(t)(w_2\kappa(t)\mathbf{e}_G(t) + (w_1\kappa(t) - w_3\tau(t))\mathbf{f}_G(t) + w_2\tau(t)\mathbf{g}_G(t))
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

således at længden af  $\mathbf{q}'(t)$ , dvs. farten af  $\mathbf{q}(t)$  kan bestemmes ud fra:

$$\|\mathbf{q}'(t)\|^2 = v^2(t) \cdot ((\tilde{w}_1^2 + \tilde{w}_2^2) \cdot \kappa^2(t) + (\tilde{w}_2^2 + \tilde{w}_3^2) \cdot \tau^2(t) - 2\tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_2 \cdot \kappa(t) \cdot \tau(t)) \quad . \tag{10.9}$$



Bemærk, at kurven  $\mathbf{q}(t)$  i eksempel 10.3 ikke nødvendigvis er regulær selv om  $\mathbf{p}(t)$  er regulær.

### OPGAVE 10.4

Antag i eksempel 10.3 at fodpunktskurven  $\mathbf{p}(t)$  har torsion  $\tau(t) = 0$  for alle  $t$  og konstant krumning  $\kappa(t) = 3$  for alle  $t$ . Hvilken kurve  $\mathbf{q}(t)$  fremstilles da ved den betragtede Cosserat-sweeping? Eftersom direkte formlen (10.9) i dette tilfælde.

#### 10.1.1 Længde af kurver

Vi repeterer først fra kapitel 8 hvordan vi beregner længden af en given kurve – her med henblik på at varme op til de tilsvarende definitioner for areal af flader (definition 10.12) og volumen af rumlige områder (definition 10.26) nedenfor.

**Definition 10.5** Længden af en kurve  $\mathcal{K}$  med parameterfremstilling

$$\mathcal{K} \quad : \quad \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))_G \quad , \quad t \in [0, T] \tag{10.10}$$

er - under forudsætning af, at kurven er regulær, dvs.  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  for alle  $t$  - givet ved integralet af længden af hastighedsvektoren:

$$L(\mathcal{K}) = \int_0^T \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^T \sqrt{(r'_1(t))^2 + (r'_2(t))^2 + (r'_3(t))^2} dt \quad . \tag{10.11}$$

### ||| OPGAVE 10.6

|| Bestem længden af den kurve, som vi konstruerede i eksempel 10.2 og viser i figur 10.1.

Vi kan også beregne længder af kurver, der stammer fra en mere generel konstruktion, hvor punktet  $q(t)$  ikke nødvendigvis har faste koordinater i det medfølgende tetraederrum.

Figur 10.2: Bevægelsen af punktet  $\mathbf{w}(t)$  i tetraederrummet. Den resulterende kurve (her en cirkel) kan betragtes som resultatet af en Cosserat-sweeping med det bevægede punkt men *uden rotation og translation* af tetraederrummet. Se eksempel 10.7. Hvis vi tilføjer rotation og translation får vi resultatet som vist i figur 10.3. Animeret.

### ||| Eksempel 10.7

Vi konstruerer en rumkurve via Cosserat-sweeping med følgende data:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_G(t) &= (0, 0, t)_G, \quad t \in [0, 3\pi] \\ \mathbf{w}_N(t) &= (1 + 3 \cos(t), 2, 3 \sin(t))_N \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad .\end{aligned}\tag{10.12}$$

Det geometriske objekt i tetraederrummet, som her benyttes til konstruktionen, er igen et punkt – ligesom i eksempel 10.2 – men punktets koordinater i tetraederrummet er ikke længere konstante: Punktet bevæger sig i tetraederrummet samtidig med at tetraederrummet bevæges dels med rotationen  $\mathbf{R}_z(t)$  og dels med løftet til fodpunktet  $(0, 0, t)_G$  i  $z$ -aksens retning.

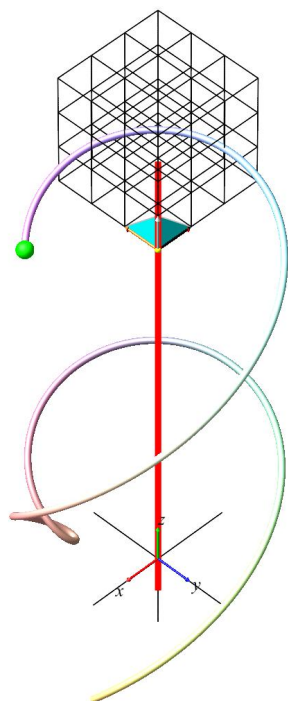
Generatorpunktets bevægelse i tetraederrummet er vist som en kurve i figur 10.2 og den resulterende sweeping i det omgivende rum er vist i figur 10.3.



Den resulterende parameterfremstilling fås på samme måde som i eksempel 10.1 – forskellen er blot at  $\mathbf{w}_N$  nu afhænger af  $t$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_G(t) &= \mathbf{p}_G(t) + \mathbf{w}_G(t) \\
 &= (0, 0, t)_G + \left( \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} 1 + 3\cos(t) \\ 2 \\ 3\sin(t) \end{bmatrix}_N \right)^* \\
 &= (0, 0, t)_G + \left( \begin{bmatrix} \cos(t)(1 + 3\cos(t)) - 2\sin(t) \\ \sin(t)(1 + 3\cos(t)) + 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{bmatrix}_G \right)^* \\
 &= (0, 0, t)_G + (\cos(t)(1 + 3\cos(t)) - 2\sin(t), \sin(t)(1 + 3\cos(t)) + 2\cos(t), 3\sin(t))_G \\
 &= (\cos(t) \cdot (1 + 3\cos(t)) - 2\sin(t), \sin(t) \cdot (1 + 3\cos(t)) + 2\cos(t), t + 3\sin(t))_G, \tag{10.13}
 \end{aligned}$$

hvor  $t$  gennemløber intervallet  $t \in [0, 3\pi]$ .



Figur 10.3: se eksempel 10.7. Sammenlign med figur 10.1 og eksempel 10.2. Animeret.

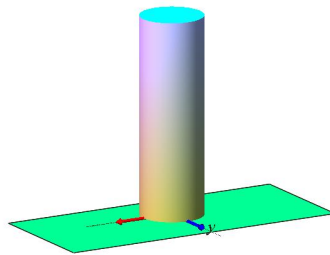
### OPGAVE 10.8

I figur 10.3 ser det ud som om den frembragte kurve skærer igennem sig selv ca. midtvejs i bevægelsen. Find ud af, om det er tilfældet – ved at bruge ingredienserne i konstruktionen fra 10.7.

### OPGAVE 10.9

Bestem længden af den kurve der er frembragt ved Cosserat-sweeping i figur 10.3 ved hjælp af ingredienserne i eksempel 10.7.

## 10.2 Flader



Figur 10.4: En ekstruderet cirkelskive.

### Eksempel 10.10

Cylinderoverfladen  $C$  (uden ende-cirkelskiverne) i figur 10.4 har et cirkulært tværsnit med radius  $1/2$  og højden af cylinderen er  $\pi$ . Så er flade-arealet let at regne ud - det er omkredsen gange højden, altså:

$$\text{Areal}(C) = \pi^2 . \quad (10.14)$$

Cylinderfladen har følgende parameterfremstilling, som kan konstrueres ved simpel sweeping med et linjestykke omkring  $z$ -aksen:

$$C : \quad \mathbf{s}(t, u) = (\cos(u)/2, \sin(u)/2, t) \\ t \in [0, \pi], u \in [0, 2\pi] . \quad (10.15)$$

Et sæt tilhørende Cosserat-sweeping-data, der giver denne parameterfremstilling, er f.eks. følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t)/2, \sin(t)/2, 0)_G \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{w}(u) &= (0, 0, u)_N \quad , \quad u \in [0, \pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.16)$$

Alternativt kan også benyttes lidt simplere Cosserat-data, som giver præcis den samme cylinderflade:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, 0)_G \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \quad , \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{w}(u) &= (1/2, 0, u)_N \quad , \quad u \in [0, \pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.17)$$

Bemærk, at  $\mathbf{w}(u)$  her er udstyret med 'selvstændig' parameter  $u$  uafhængig af  $t$ , således at det er en flade og ikke en kurve, der konstrueres med disse Cosserat-data.

Arealet af cylinderfladen kan også fås ved brug af den generelle arealformel for regulære parameterfremstillinger:

### 10.2.1 Areal af flader

En parametriseret **flade i rummet** er typisk givet ved en parameterfremstilling som følger

$$F_S : \quad \mathbf{s}(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (10.18)$$

hvor  $s_1(u, v)$ ,  $s_2(u, v)$ , og  $s_3(u, v)$  er givne funktioner af de to variable  $u$  og  $v$ .

**Jacobi-funktionen**  $\text{Jacobi}_s(u, v)$  for parameterfremstillingen er her givet ved

$$\text{Jacobi}_s(u, v) = \|\mathbf{s}'_u(u, v) \times \mathbf{s}'_v(u, v)\| \quad , \quad (10.19)$$

dvs. arealet af det parallelogram, der på stedet  $\mathbf{s}(u, v)$  udspændes af de to tangentvektorer  $\mathbf{s}'_u(u, v)$  og  $\mathbf{s}'_v(u, v)$  til de respektive koordinatkurver igennem punktet  $\mathbf{s}(u, v)$  på fladen.

|||| **Definition 10.11** Parameterfremstillingen (10.18) siges at være en *regulær parameterfremstilling* hvis der gælder følgende:

$$\text{Jacobi}_s(u, v) > 0 \quad \text{for alle} \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad . \quad (10.20)$$

||| **Definition 10.12** Arealet af den parametriserede flade

$$F_s : \mathbf{s}(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] , v \in [c, d] \quad (10.21)$$

defineres som :

$$\text{Areal}(F_s) = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_s(u, v) \, du \, dv \quad . \quad (10.22)$$

||| **Eksempel 10.13**

En parameterfremstilling for cylinderfladen var følgende, se eksempel 10.10:

$$\begin{aligned} C : \mathbf{s}(t, u) &= (\cos(u)/2, \sin(u)/2, t) \\ t &\in [0, \pi] , u \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.23)$$

Denne parameterfremstilling har Jacobi-funktionen

$$\text{Jacobi}_s(t, u) = 1/2 \quad , \quad (10.24)$$

og arealet er derfor:

$$\text{Areal}(C) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \text{Jacobi}_s(t, u) \, dt \, du = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \, dt \, du = \pi^2 \quad , \quad (10.25)$$

i overensstemmelse med den direkte beregning.

## 10.3 Cosserat-sweeping med kurver

||| **Eksempel 10.14**

En fodpunktskurve er defineret som en parametriseret dobbelt-gennemløbet cirkel i  $(x, y)$ -planen:

$$\mathbf{p}(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 0)_G \quad , \quad t \in [0, 4\pi] \quad . \quad (10.26)$$

Bemærk tidsintervallet!

Det geometriske objekt, der benyttes som generator for Cosserat-sweeping af den flade der er vist i figur 10.5 , er en ret linje der defineres i tetraederrummet – med hensyn til det nye koordinatsystem således:

$$\mathcal{L} : \mathbf{w}_N(u) = (u, 2u, 3u)_N \quad , \quad u \in [-2, 2] \quad . \quad (10.27)$$

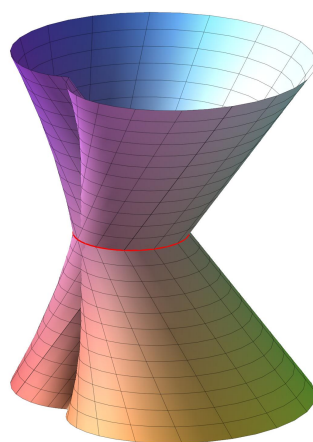
Den rotation, der styrer tetraederrummet langs med fodpunktskurven defineres ved rotationsmatricen:

$$\mathbf{R}_G(t) = \mathbf{R}_z(t/2) \quad . \quad (10.28)$$

Den resulterende flade  $\mathcal{F}$ , der fejes ud ved den tilhørende Cosserat-sweeping er afbildet i figur 10.5. Den har dermed parameterfremstillingen med hensyn til det gamle koordinatsystem  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} : \mathbf{r}_G(t, u) &= \mathbf{p}_G(t) + (\mathbf{R}_G(t) \mathbf{w}_N^*(u))^* \\
 &= (2 \cos(t), 2 \sin(t), 0)_G + \left( \mathbf{R}_z(t) \begin{bmatrix} u \\ 2u \\ 3u \end{bmatrix}_N \right)^* \\
 &= (2 \cos(t), 2 \sin(t), 0)_G + \left( \begin{bmatrix} \cos(t/2) & -\sin(t/2) & 0 \\ \sin(t/2) & \cos(t/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 2u \\ 3u \end{bmatrix}_N \right)^* \\
 &= (2 \cos(t), 2 \sin(t), 0)_G + \begin{bmatrix} u \cos(t/2) - 2u \sin(t/2) \\ u \sin(t/2) + 2u \cos(t/2) \\ 3u \end{bmatrix}_G^* \\
 &= (2 \cos(t), 2 \sin(t), 0)_G + (u \cos(t/2) - 2u \sin(t/2), u \sin(t/2) + 2u \cos(t/2), 3u)_G \\
 &= (2 \cos(t) + u \cos(t/2) - 2u \sin(t/2), 2 \sin(t) + u \sin(t/2) + 2u \cos(t/2), 3u)_G,
 \end{aligned} \tag{10.29}$$

hvor  $t \in [0, 4\pi]$  og  $u \in [-2, 2]$ .

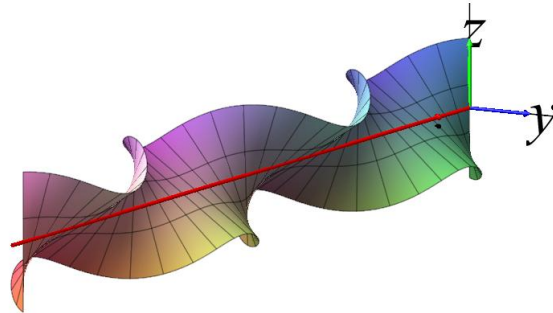


Figur 10.5: Se eksempel 10.14 og opgave 10.16.

### ||| OPGAVE 10.15

*Dette er opgave 3 fra 2-timersprøven 18. december 2013*

En krøllet flade i rummet er konstrueret ved sweeping med et linjestykke langs  $x$ -aksen således:



Fodpunktskurven er givet med hensyn til det sædvanlige koordinatsystem  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  som en del af  $x$ -aksen således:

$$\mathbf{p}(t) = (t, 0, 0)_G \quad , \quad \text{for } t \in [0, 4\pi] \quad . \quad (10.30)$$

Rotationsmatricen, der definerer de nye basisvektorer  $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ , er givet ved følgende variable rotation omkring  $x$ -aksen:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_x(\sin(t)) \quad . \quad (10.31)$$

Linjestykket, der bevæges langs med fodpunktskurven, har følgende faste parameterfremstilling med hensyn til den medfølgende basis:

$$\mathbf{w}(u) = (0, 0, u)_N \quad , \quad \text{for } u \in [-1, 1] \quad . \quad (10.32)$$

1. Bestem en parameterfremstilling (med hensyn til det sædvanlige koordinatsystem) for bevægelsen af det punkt på linjestykket, der svarer til  $u = 1$ , altså punktet  $(0, 0, 1)_N$ .
2. Argumentér for, at arealet af den konstruerede flade er større end  $8\pi$ .

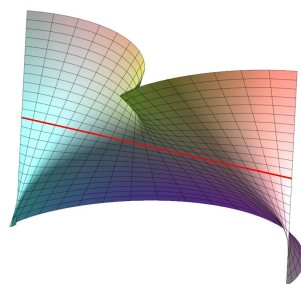
### OPGAVE 10.16

Bestem arealet af fladen  $\mathcal{F}$  som er konstrueret i eksempel 10.14 og afbildet i figur 10.5. Find ud af, om fladen er regulær. Hvor stort et  $u$ -interval (indeholdende 0) kan højst benyttes hvis fladen skal være regulær overalt?

### Eksempel 10.17

Cosserat-data for fladen i figur 10.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (t, 0, 0)_G \quad , \quad t \in [0, 4\pi] \\ \mathbf{w}_N(u) &= (u, 2u, 3u)_N \quad , \quad u \in [-2, 2] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t/2) \quad . \end{aligned} \quad (10.33)$$



Figur 10.6: Se eksempel 10.17.

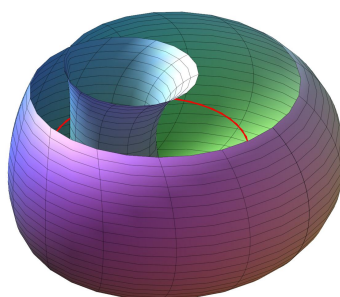
### ||| OPGAVE 10.18

Bestem arealet af fladen  $\mathcal{F}$  som er konstrueret i eksempel 10.17 og afbildet i figur 10.6. Find ud af, om fladen er regulær. Hvor stort et  $u$ -interval (indeholdende 0) kan højst benyttes hvis fladen skal være regulær overalt?

### ||| Eksempel 10.19

Cosserat-data for fladen i figur 10.7:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)_G, \quad t \in [0, 4\pi] \\ \mathbf{w}_N(u) &= (\cos(u), 0, \sin(u))_N, \quad u \in [-\pi/2, 1] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t/2) \end{aligned} \quad (10.34)$$



Figur 10.7: Se eksempel 10.19.

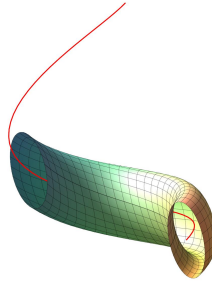
### OPGAVE 10.20

Bestem arealet af fladen  $\mathcal{F}$  som er konstrueret i eksempel 10.19 og afbildet i figur 10.7. Find ud af, om fladen er regulær. Hvor stort et  $u$ -interval (indeholdende 0) kan højst benyttes hvis fladen skal være regulær overalt?

### Eksempel 10.21

Cosserat-data for fladen i figur 10.8:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (2 \cos(t), 2 \sin(t), t)_G, \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{w}_N(u) &= (\cos(u)/2, 0, \sin(u))_N, \quad u \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \end{aligned} \quad (10.35)$$



Figur 10.8: Se eksempel 10.21.

### Eksempel 10.22

Cosserat-data for fladen i figur 10.9:

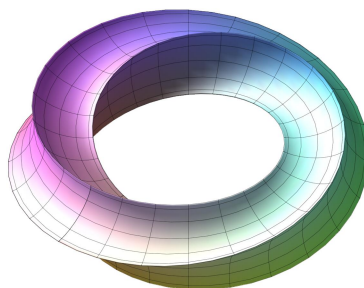
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (3 \cos(t), 3 \sin(t), t)_G, \quad t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{w}_N(u) &= (\cos^3(u), 0, \sin^3(u))_N, \quad u \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_y(t/2) \end{aligned} \quad (10.36)$$

### Eksempel 10.23

Cosserat-data for fladen i figur 10.10:

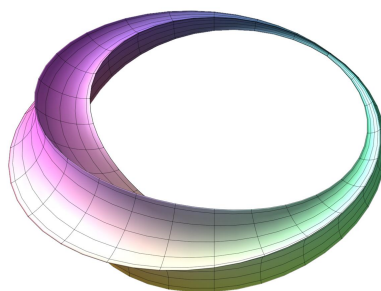
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (3 \cos(t), 3 \sin(t), t)_G, \quad t \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{w}_N(t, u) &= (\cos^3(u) \cdot e^{-t^2/3}, 0, \sin^3(u) \cdot e^{-t^2/3})_N, \quad u \in [-\pi, \pi], \quad t \in [-\pi, \pi] \\ \mathbf{R}_G(t) &= \mathbf{R}_z(t) \cdot \mathbf{R}_y(t/2) \end{aligned} \quad (10.37)$$





Figur 10.9: Se eksempel 10.22.

Bemærk, at i dette tilfælde er  $\mathbf{w}(t, u)$  afhængig af både  $t$  og  $u$  således at den profilkurve i tetraederrummet, der benyttes til Cosserat-sweeping af fladen ændrer form langs fodpunktskurven, dvs. i afhængighed af tiden  $t$ , som det også fremgår af den tilhørende figur 10.10.



Figur 10.10: Se eksempel 10.23.

### Eksempel 10.24

Den bøjede cylinderflade i figur 10.11 – halvdelen af en torus-flade – har parameterfremstillingen (for den del af overfladen, som ikke er cirkelskive-endefladerne):

$$\mathcal{F} : \quad \mathbf{s}(t, v) = (\cos(t)(1 + \cos(v)/2), \sin(v)/2, \sin(t)(1 + \sin(t) \cos(v)/2)) \quad (10.38)$$

$$t \in [0, \pi] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad .$$

Cylinderfladen kan frembringes ved Cosserat-sweeping med følgende data:

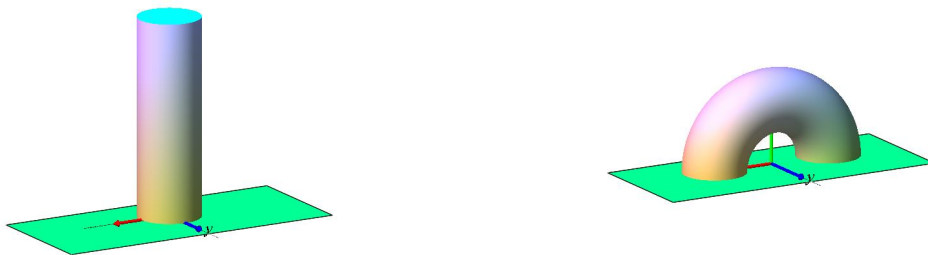
$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t)) \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{w}(u) &= (\cos(u)/2, \sin(u)/2, 0)_N \quad , \quad u \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (10.39)$$

Den tilhørende Jacobi-funktion:

$$\text{Jacobi}_s(t, u) = (2 + \cos(u))/4 \quad , \quad (10.40)$$

således at arealet er

$$\text{Areal}(F_s) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{Jacobi}_s(t, u) dt du = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 + \cos(u))/4 dt du = \pi^2 \quad , \quad (10.41)$$



Figur 10.11: En ekstruderet cirkel, dels lodret og dels 'roteret', 'bøjet' (via en ekstra rotation om y-aksen. Se eksempel 10.35.

## 10.4 Rumlige områder

### Eksempel 10.25

Den massive solide cylinder  $C$  i figur 10.4 har cirkulært tværsnit med radius  $1/2$  og højden af cylinderen er  $\pi$ . Så er volumenet let at regne ud - det er tværsnitsarealet gange højden, altså:

$$\text{Vol}(C) = \left(\frac{1}{4}\right) \pi^2 \quad . \quad (10.42)$$

Den massive cylinder har følgende parameterfremstilling, som fremkommer ved en simpel sweeping (ekstrudering) med en cirkelskive langs  $z$ -aksen:

$$\begin{aligned} C \quad : \quad \mathbf{s}(t, u, v) &= (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), t) \\ t &\in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi], \quad u \in [0, 1/2] \quad . \end{aligned} \quad (10.43)$$

En tilhørende Cosserat-sweeping kan opnås ved at bruge følgende simple data:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, t) \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{w}(u, v) &= (u \cos(v), u \sin(v), 0)_N \quad , \quad u \in [0, 1/2] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.44)$$

Volumenet af den massive cylinder kan også fås ved brug af den generelle volumenformel for regulære parameterfremstillinger:

### 10.4.1 Rumfang af rumlige områder

Et parametriseret **rumligt område** er generelt givet ved en parameterfremstilling

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r : \quad \mathbf{r}(t, u, v) &= (r_1(t, u, v), r_2(t, u, v), r_3(t, u, v))_G \\ t &\in [0, T] \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad . \end{aligned} \quad (10.45)$$

||| **Definition 10.26** Rumfanget af det parametriserede område  $\mathcal{M}_r$  er så bestemt ved

$$\text{Vol}(\mathcal{M}_r) = \int_0^T \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_r(t, u, v) \, du \, dv \, dt \quad , \quad (10.46)$$

hvor **Jacobi-funktionen**  $\text{Jacobi}_r(t, u, v)$  er

$$\begin{aligned} \text{Jacobi}_r(t, u, v) &= |(\mathbf{r}'_u(t, u, v) \times \mathbf{r}'_v(t, u, v)) \cdot \mathbf{r}'_t(t, u, v)| \\ &= |\text{Rum}(\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v, \mathbf{r}'_t)| \quad . \end{aligned} \quad (10.47)$$

### ||| OPGAVE 10.27

|| Benyt ovenstående definition af rumfang til at gen-beregne rumfanget af cylinderen i eksempel 10.25.

### ||| Eksempel 10.28

Den bøjede massive cylinder i figur 10.11 har parameterfremstillingen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= (\cos(t)(1 + u \cos(v)/2), u \sin(v)/2, \sin(t)(1 + u \sin(t) \cos(v)/2)) \\ t &\in [0, \pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.48)$$

En Cosserat-sweeping af det rumlige område kan opnås ved at bruge følgende data:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}_g(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{w}(u, v) &= (u \cos(v)/2, u \sin(v)/2, 0)_N \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad . \end{aligned} \quad (10.49)$$

Bemærk, at  $\mathbf{w}(u, v)$  nu afhænger af de to (af  $t$  uafhængige) variable  $u$  og  $v$ , således at der med disse Cosserat-data ekstruderes et rumligt område, når  $t$ ,  $u$ , og  $v$  gennemløber deres respektive definitionsintervaller.

Den til parameterfremstillingen hørende Jacobi-funktion:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v) = \left(\frac{1}{8}\right) u \cdot (u \cdot \cos(v) + 2) \quad , \quad (10.50)$$

således at volumenet er

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F_{\mathbf{r}}) &= \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v) dt du dv \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}\right) u \cdot (u \cdot \cos(v) + 2) dt du dv \\ &= \frac{1}{4} \pi^2 \quad . \end{aligned} \quad (10.51)$$

### ||| OPGAVE 10.29

|| De to cylindre, den rette og den bøjede, i figur 10.11 har samme rumfang. Har de også samme areal?

## 10.5 Cosserat-sweeping med flader

Cosserat sweeping med en flade i tetraederrummet giver typisk et rumligt område:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G \quad , \quad t \in I_t \\ \mathbf{w}_N(u, v) &= (\tilde{w}_1(u, v), \tilde{w}_2(u, v), \tilde{w}_3(u, v))_N \quad , \quad u \in I_u \quad , \quad v \in I_v \\ \mathbf{R}_G(t) &= \text{tidsafhængig rotationsmatrix} \quad , \quad t \in I_t \quad . \end{aligned} \quad (10.52)$$

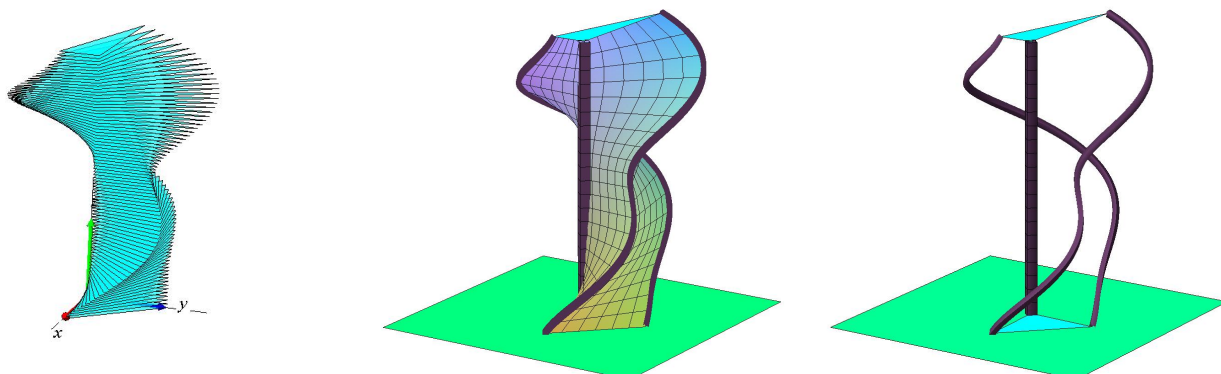
Generator-fladen i tetraederrummet kan gerne selv være tidsafhængig:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_G(t) &= (p_1(t), p_2(t), p_3(t))_G \quad , \quad t \in I_t \\ \mathbf{w}_N(t, u, v) &= (\tilde{w}_1(t, u, v), \tilde{w}_2(t, u, v), \tilde{w}_3(t, u, v))_N \quad , \quad t \in I_t \quad , \quad u \in I_u \quad , \quad v \in I_v \\ \mathbf{R}_G(t) &= \text{tidsafhængig rotationsmatrix} \quad , \quad t \in I_t \quad . \end{aligned} \quad (10.53)$$

Generatorfladen  $\mathcal{S}_t$  defineres til ethvert tidspunkt  $t$  i  $(\xi, \eta, \zeta)$ -koordinater i tetraederrummet generelt således:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= (\tilde{w}_1(t, u, v), \tilde{w}_2(t, u, v), \tilde{w}_3(t, u, v))_N \\ t \in I_t \quad , \quad u \in I_u \quad , \quad v \in I_v \quad , \end{aligned} \quad (10.54)$$

hvor  $\tilde{w}_1(t, u, v)$  og  $\tilde{w}_2(t, u, v)$  er givne funktioner dels af tiden  $t$  og dels af de to parametre  $u$  og  $v$ , som løber i de tre parameterintervaller  $I_t$ ,  $I_u$ , og  $I_v$  henholdsvis. Formen af det rumlige område er



Figur 10.12: Det område i rummet, som 'konstrueres' med trekantene  $\Delta(t)$  fra eksempel 6.7, idet fodpunktet for hængslerne nu bevæges langs  $z$ -aksen og trekantene (be-)holdes vandrette, altså parallelle med  $(x,y)$ -planen. Bemærk, at de benyttede trekantner i dette tilfælde *ikke er uforanderlige* i det medfølgende tetraederrum.

(til ethvert tidspunkt) 'bygget ind i' de tre funktioner  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ , og  $\tilde{w}_3$ .

Selvom generatorfladerne i tetraederrummet således kan defineres som helt generelle flader i det tum, vil vi her nøjes med at betragte passende simple plane områder i  $(\xi, \eta)$ -planen som generatorflader:

Lad os se på en velkendt **uforanderlig (tiduafhængig) figur** i  $(\xi, \eta)$ -planen: En trekant i den plan, som er udspændt af to givne kantvektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  fra det fælles fodpunkt i det nye Origo  $Q$  består af de punkter i planen, der har stedvektorerne (fra  $Q$ ):

$$\mathbf{w}(u, v) = u(\mathbf{a} + v(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad . \quad (10.55)$$

### OPGAVE 10.30

Vis, at denne parametrisering er ækvivalent med den beskrivelse af de indre trekantspunkter, som vi tidligere har benyttet i afsnit 2.2.1 i kapitel 2, nemlig følgende:

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad , \quad (10.56)$$

hvor vi der antog, at  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta \leq 1$ . Vink: Vis først, at  $\alpha = u - uv$  og  $\beta = uv$ .

De to udspændende vektorer  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  kan i det nye koordinatsystem skrives som:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, 0)_N \\ \mathbf{b} &= (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, 0)_N \quad , \end{aligned} \quad (10.57)$$

sådan at parameterfremstillingen for det trekantede område kan skrives på formen:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= ((u - uv)\tilde{a}_1 + uv\tilde{b}_1, (u - uv)\tilde{a}_2 + uv\tilde{b}_2)_N \\ u &\in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad , \end{aligned} \quad (10.58)$$

### Eksempel 10.31

Et **uforanderligt rektangel** er tilsvarende, og simplere, givet ved

$$\mathcal{R}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t, u, v) = (u, v, 0)_N \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (10.59)$$

hvor intervallerne  $[a, b]$  og  $[c, d]$  bestemmer størrelse og placering af rektanglet i  $(\xi, \eta)$ -koordinatsystemet.

### Eksempel 10.32

En **uforanderlig cirkelskive** med centrum i  $(c_1, c_2, 0)_N$  og radius  $\rho$  fås ved brug af polære koordinater:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t \quad : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= (c_1 + u\rho \cos(v), c_2 + u\rho \sin(v), 0)_N \\ u &\in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.60)$$

### Eksempel 10.33

En **variabel cirkelskive** med *tidsafhængig centrum* i  $(c_1(t), c_2(t), 0)_N$  og *tidsafhængig radius*  $\rho(t)$ :

$$\mathcal{D}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) = (c_1(t) + u\rho(t) \cos(v), c_2(t) + u\rho(t) \sin(v), 0)_N \quad (10.61)$$

$$t \in [0, T] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad .$$

### Eksempel 10.34

En **uforanderlig cirkelskive ekstruderes lodret** som til venstre i figur 10.11. Ingredienserne til denne konstruktion er med ovenstående notation:

$$\mathbf{p}(t) = (0, 0, t)_G \quad , \quad t \in [0, \pi]$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G$$

$$\mathbf{w}(t, u, v) = (u \cos(v)/2, u \sin(v)/2, 0)_N \quad (10.62)$$

$$\mathbf{r}(t, u, v) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v)$$

$$t \in [0, \pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad .$$

### Eksempel 10.35

Den samme cirkelskive som i eksempel 10.34 kan ekstruderes med en roterende bevægelse af tetraederrummet og en tilsvarende cirkulær fodpunktsbevægelse, se figur 10.11 til højre.

$$\mathbf{p}(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))_G \quad , \quad t \in [0, \pi]$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G$$

$$\mathbf{w}(t, u, v) = (u \cos(v)/2, u \sin(v)/2, 0)_N \quad (10.63)$$

$$\mathbf{r}(t, u, v) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v)$$

$$t \in [0, \pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad .$$

### Eksempel 10.36

En **variabel ellipse-skive** med *tidsafhængig centrum* i  $(c_1(t), c_2(t), 0)_N$  og *tidsafhængige halvaksler*  $\rho_1(t)$  og  $\rho_2(t)$ :

$$\mathcal{E}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) = (c_1(t) + u\rho_1(t) \cos(v), c_2(t) + u\rho_2(t) \sin(v), 0)_N \quad (10.64)$$

$$t \in [0, T] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad .$$

### Eksempel 10.37

En lodret ekstrudering af den variable ellipseskive kan konstrueres efter samme model som i eksempel 10.34 - se figur 10.13 til venstre:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, t)_G, \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= \frac{1}{2} \left( u \left( \frac{1}{2} + \sin^2(3t) \right) \cos(v), u \left( \frac{1}{2} + \cos^2(3t) \right) \sin(v), 0 \right)_N \end{aligned} \quad (10.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ t &\in [0, \pi], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

### Eksempel 10.38

En tilsvarende variabel ellipseskive ekstruderes med en roterende bevægelse af tetraederrummet langs en cirkulær fodpunktskurve - se figur 10.13 til højre:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G, \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= \frac{1}{2} \left( u \left( \frac{1}{2} + \sin^2(3t) \right) \cos(v), u \left( \frac{1}{2} + \cos^2(3t) \right) \sin(v), 0 \right)_N \end{aligned} \quad (10.66)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ t &\in [0, \pi], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

En **uforanderlig trekant** i  $(\xi, \eta)$ -planen, som er udspændt af de to specielle kantvektorer  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}(t)$  og  $\mathbf{b} = \beta \mathbf{f}(t)$  fra det fælles fodpunkt i  $\mathbf{p}(t)$  er som tidligere vist givet ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t, u, v) &= u(\alpha \mathbf{e}(t) + v(\beta \mathbf{f}(t) - \alpha \mathbf{e}(t))) \\ &= u\alpha(1-v)\mathbf{e}(t) + uv\beta\mathbf{f}(t) \\ t &\in [0, T], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Det udfejdede område i rummet er dernæst:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + u\alpha(1-v)\mathbf{e}(t) + uv\beta\mathbf{f}(t) \\ t &\in [0, T], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10.68)$$





Figur 10.13: Ekstruderet variabel ellipseskive, dels lodret og dels med roteret bevægelse af det ekstruderende tetraederrum. Se forskrifterne i eksemplerne 10.37 og 10.38.

### Eksempel 10.39

Med  $\alpha = 1$  og  $\beta = 1$  fås eksempelvis figur 10.14 som er baseret på følgende ingredienser:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G, \quad t \in [0, 1] \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= (u(1-v), uv, 0)_N \end{aligned} \quad (10.69)$$

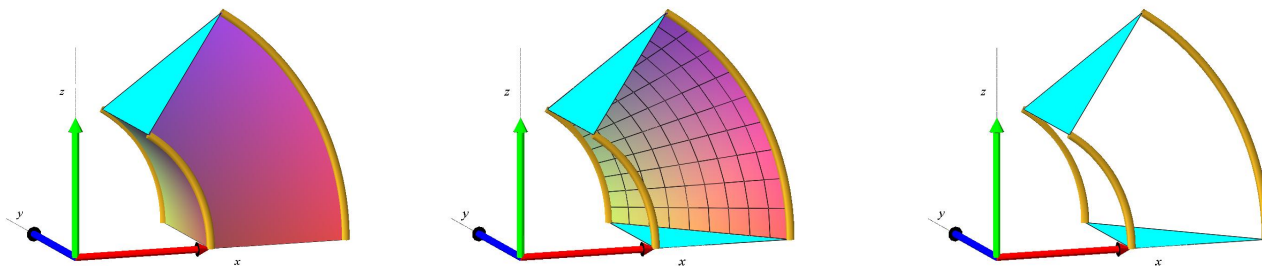
hvorved vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ &= (\cos(t) + u(1-v)\cos(t), uv, \sin(t) + u(1-v)\sin(t))_G \\ t &\in [0, 1], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10.70)$$

### Eksempel 10.40

I eksempel 10.39 har vi - ud over toppen og bunden, som er standard basis trekanter - tre sideflader  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ , og  $\mathcal{F}_3$ . Deres respektive parameterfremstillinger følger direkte af parameterfremstillingen  $\mathbf{r}(t, u, v)$  for det tilsvarende rumlige område:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= (\cos(t) + u(1-v)\cos(t), uv, \sin(t) + u(1-v)\sin(t))_G \\ t &\in [0, 1], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10.71)$$



Figur 10.14: Ekstrudering, sweeping, med basistrekant. Konstrueret ved rotation omkring  $y$ -aksen. Se eksempel 10.39.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1 & : \quad \mathbf{s}_1(t, v) = \mathbf{r}(t, 1, v) = (\cos(t) + \cos(t)(1 - v), v, \sin(t) + \sin(t)(1 - v))_G \\
 & \quad t \in [0, 1], v \in [0, 1] \quad , \\
 \mathcal{F}_2 & : \quad \mathbf{s}_2(t, u) = \mathbf{r}(t, u, 0) = (\cos(t)(1 + u), 0, \sin(t)(1 + u))_G \\
 & \quad t \in [0, 1], u \in [0, 1] \quad , \\
 \mathcal{F}_3 & : \quad \mathbf{s}_3(t, u) = \mathbf{r}(t, u, 1) = (\cos(t), u, \sin(t))_G \\
 & \quad t \in [0, 1], u \in [0, 1] \quad .
 \end{aligned} \tag{10.72}$$

Det er sidefladen  $\mathcal{F}_1$ , der er vist i figur 10.14 i midten. Bemærk, at per konstruktion optræder parameteren  $t$  i alle sidefladernes parameterfremstillinger. De respektive Jacobi-funktioner er nu:

$$\begin{aligned}
 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_1}(t, v) & = \sqrt{2}(2 - v) \quad , \\
 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_2}(t, u) & = 1 + u \quad , \\
 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_3}(t, u) & = 1 \quad .
 \end{aligned} \tag{10.73}$$

Arealerne er derfor:

$$\begin{aligned}
 \text{Areal}(F_{\mathbf{s}_1}) & = \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_1}(t, v) dt dv = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2}(2 - v) dt dv = 3/\sqrt{2} \quad , \\
 \text{Areal}(F_{\mathbf{s}_2}) & = \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_2}(t, u) dt du = \int_0^1 \int_0^1 (1 + u) dt du = 3/2 \quad , \\
 \text{Areal}(F_{\mathbf{s}_3}) & = \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_3}(t, u) dt du = \int_0^1 \int_0^1 1 dt du = 1 \quad .
 \end{aligned} \tag{10.74}$$

### OPGAVE 10.41

- Bestem de respektive længder af de hjørne-kurver, der er vist i figur 10.14.

### Eksempel 10.42

I eksempel 10.39 får vi eksplicit for alle  $u \in [a, b]$ ,  $v \in [c, d]$  og for alle  $t$ :

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v) = \mathbf{r}'_t(t, u, v) \cdot (\mathbf{r}'_u(t, u, v) \times \mathbf{r}'_v(t, u, v)) = u(1 + u - uv) \quad (10.75)$$

- altså uafhængigt af  $t$ .

### OPGAVE 10.43

- Eftervis udtrykket i ligning (10.75) for den Jacobi-funktion.

### OPGAVE 10.44

- Bestem rumfanget af det område, der er vist i figur 10.14 baseret på eksempel 10.39. Benyt (10.75).

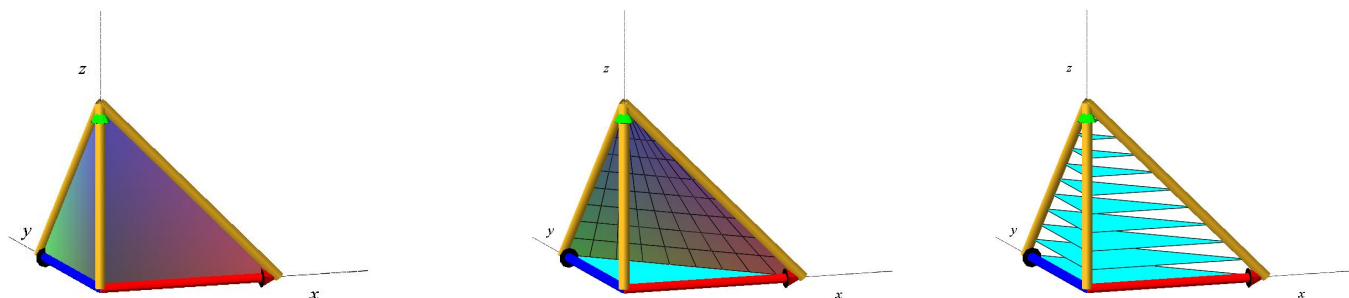
### OPGAVE 10.45

Basistetraederet  $\boxtimes_0 = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  er selv et rumligt område, der kan fremstilles ved 'ekstrudering' ud fra et simpelt plant område, i dette tilfælde basis-trekanten, ved en passende simpel tetraeder-bevægelse, som hermed angivet på samme form som ovenfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, t)_G, \quad t \in [0, 1] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= ((1-t)u(1-v), (1-t)uv, 0)_N \\ \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ t &\in [0, 1], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10.76)$$

- Argumentér for, at denne beskrivelse virkelig *er* en beskrivelse af standard-tetraederet. Se figur 10.15.
- Bestem (ved at bruge denne beskrivelse og definition 10.26) rumfanget af basis-tetraederet,  $\text{Vol}(\boxtimes_0)$ .

### OPGAVE 10.46

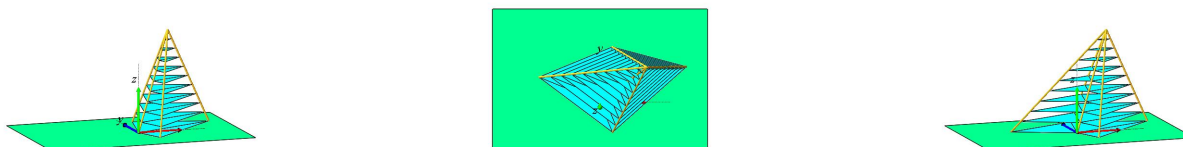


Figur 10.15: Basistetraederet som ekstruderet objekt. Se opgave 10.45.

Bestem på tilsvarende måde (a'la opgave 10.45) rumfanget af en vilkårlig **pyramide**. Vink: Opdel først grundpolygonen i trekanter og find rumfanget af pyramider med trekantede grundflader. Se figur 10.16.

### OPGAVE 10.47

Beskriv Malmø's Turning Torso som en Cosserat sweeping og find rumfanget af bygningen. Se figur 10.17.



Figur 10.16: Pyramide som ekstruderet objekt ud fra en trianguleret firkant i planen. Se opgave 10.46.



Figur 10.17: 'Turning Torso of Malmö' som ekstrudering med 5-kantet basis. Se opgave 10.47.

En vilkårlig given polygon i  $(x, y)$ -planen kan nu benyttes til konstruktion af mangfoldige Cosserat-sweepings – både af flader og af rumlige områder. Vi nøjes her med at illustrere princippet med en  $\Gamma$  lignende polygon som i figur 10.18.



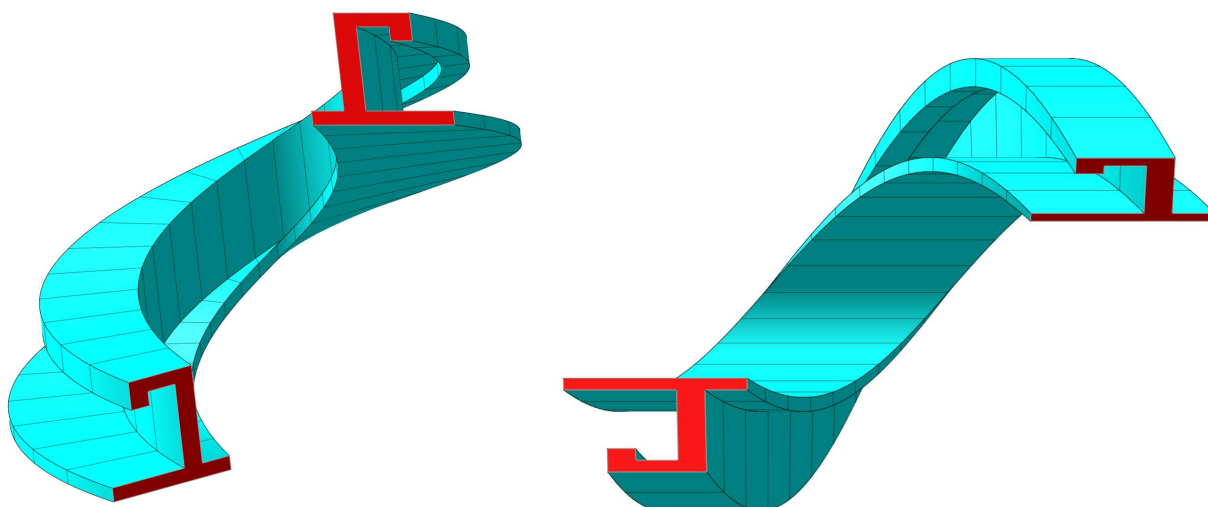
Figur 10.18: En plan figur som benyttes til Cosserat-sweeping i figur 10.19.

### ||| OPGAVE 10.48

Den givne  $\Gamma$ -polygon i grund-figuren 10.18 har følgende 12 hjørnepunkter i rækkefølge – med hensyn til tetraederrummets koordinatsystem:

$$\Gamma = \{(-1, 9, 0), (6, 9, 0), (6, 7, 0), (4, 7, 0), (4, 8, 0), (1, 8, 0), (1, 2, 0), (9, 2, 0), (9, 1, 0), (-4, 1, 0), (-4, 2, 0), (-1, 2, 0)\}_N. \quad (10.77)$$

Bestem to sæt af Cosserat-sweeping data  $\mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$ , og  $\mathbf{w}(u)$  således at de tilsvarende to Cosserat sweepings giver de rumlige områder (og tilhørende sideflader) i figur 10.19.



Figur 10.19: Den plane figur fra figur 10.18 er her benyttet til Cosserat-sweeping med to meget forskellige 'udtryk' og meget forskellige anvendelses-muligheder.

Vink: Den ene figur fremkommer ved at definere  $\mathbf{w}$  ved først at parallelforskyde  $\Gamma$  en fast vektor i  $\eta$ -aksens retning i tetraederrummet og derefter benytte en passende  $t$ -afhængig rotation  $\mathbf{R}_x$  om  $x$ -aksen samt en fodpunktsbevægelse i  $x$ -aksens retning. Den anden figur fremkommer tilsvarende ved at definere  $\mathbf{w}$  ved først at parallelforskyde  $\Gamma$  en fast vektor i  $\xi$ -aksens retning i tetraederrummet og derefter benytte en rotation om  $y$ -aksen og en fodpunktsbevægelse i  $y$ -aksens retning.

# Litteratur

- [Bj1] F. Fabricius Bjerre, *Geometri I: Analytisk Geometri, Lineær algebra*, Polyteknisk Forlag, 1981.
- [Bj2] F. Fabricius Bjerre, *Geometri II: Differentialgeometri, Kinematisk geometri*, Polyteknisk Forlag, 1981.
- [BP] W. Boehm and H. Prautzsch, *Geometric Concepts for Geometric Design*, A. K. Peters Ltd. 1994.
- [Br] K. Brakke, *The Surface Evolver*, <http://www.susqu.edu/brakke/>
- [BBI] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics **33** (2001).
- [DBT] A. Derouet-Jourdan, F. Bertails-Descoubes, and J. Thollot. *Floating tangents for approximating spatial curves with  $G^1$  piecewise helices*. *Comput. Aided Geom. Design*, 30(5):490–520, 2013.
- [Fow] G. R. Fowles and G. L. Cassiday, *Analytical Mechanics*, 7. ed., Cengage Learning, 2004.
- [GS] O. Gonzales and A. M. Stuart, *A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge University press, 2008.
- [KCP] P. Klit, K. Casper, and N. L. Pedersen, *Machine Elements, Analysis and Design*, DTU Mechanical Engineering, 2007.
- [VLH] V. Lundsgaard Hansen, *Jeg er den største*, *Normat* 2, 1998, 71–75.
- [Mac] MacTutor History of Mathematics, <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>
- [Maple] Maple's hjemmeside <http://www.maplesoft.com/>
- [ND] B. Noble and J. W. Daniel, *Applied Linear Algebra*, 3. ed. Prentice Hall, 1988.
- [ON] B. O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, 2. ed. Academic Press, 2006.

- [Po] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007.
- [P] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2010.
- [Sal] D. Salomon, *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer, 2006.
- [St2] K. Stephenson, *Introduction to Circle Packing*, Cambridge University Press, 2005.
- [S] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra, 4. ed.*, Wellesley–Cambridge Press, 2009.
- [MW] Eric Weisstein’s Matematik Encyklopædi, <http://mathworld.wolfram.com/>
- [W] R. Woodbury, *Elements of Parametric Design*, Routledge, Taylor & Francis, 2010.



# Indeks

- $(n \times n)$ -rotationsmatricer, 61
- $3 \times 3$ -rotationsmatrix, 51
- 'inverse matrix', 71
- (sted)-vektor-funktionen, 113
- øjeblikkelig drejning, 163
- øjeblikkelig hvile, 159
- øjeblikkelig parallelforskydning, 159
- øjeblikkelig reduceret skrue-højde, 161
- øjeblikkelig skrue-akse, 161
- øjeblikkelig skrue-bevægelse, 161
- øjeblikkelig skruebevægelse, 163
- øjeblikkelig translation, 159
- øjeblikkelig vinkelhastighed, 161
- øjeblikkelige hastighedsfelt, 157
  
- additionsformlerne for cosinus og sinus, 23
- aflavede af et matrix-produkt, 100
- akserotationerne, 51
- approksimerende vindelinje, 135
- Arealet, 188
- arealet, 11
- Arealet af en rumlig trekant, 40
- associerede akse-matrix, 103
- associerede akse-vektor, 103
- asteroiden, 115
  
- basistrekanten, 10
- basisvektorer, 8
- bevæger sig, 113
- buelængden med fortegn, 118
- buelængdeparametriseret, 118
  
- Cosserat-sweeping, 179
  
- deformere plane trekkanter, 19
  
- designer kurver, flader og rumlige områder, 179
- dynamiske hængsel, 85
  
- ekstruderede objekter, 180
- energi, 31
  
- fabrik, 31
- farten, 115
- flade i rummet, 187
- flip-matrix, 50
- flipmatrix, 25, 61
- fodpunkt, 8, 36
- fræsehoved, 151
- fræseværktøj, 151
- Frenet-Serret basen, 123
- Frenet-Serret treben, 145
- Frenet-Serret-matrix, 146
- Frobenius norm, 71
  
- gamle koordinater, 153
- grund-objekter for at kunne bygge, 179
- grundfladens areal, 37
  
- højden, 37
- højre-singulære vektorer, 62, 64
- højreskruet, 116
- hastigheds-indikatoren, 143
- hastighedsvektoren, 115
- helix, 116
- Heron, 17
- hjørnepunkter, 10
  
- indre vinkel, 13
  
- Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_r(t, u, v)$ , 195
- Jacobi-funktionen  $\text{Jacobi}_s(u, v)$ , 187

- kant-vektorer, 10  
 karakteristiske polynomium, 29  
 kollapsede trekanter, 12  
 koordinat-søjle-matricer, 10, 36  
 koordinat-søjle-matrix, 181  
 koordinataksler, 8  
 koordinatfunktioner, 113  
 Koordinatsystemet i planen, 8  
 Koordinatsystemet i rummet, 35  
 Krumningen af kurven, 122  
 krumnings-indikatoren, 143  
 krumnings-matrix, 146  
 krydsproduktet, 37  
 kvadratformede regulære, 61  
 kvadrattal, 62  
  
 Længden af en kurve, 183  
 lavest forekommende potenser, 128  
 lineær afbildning, 22  
 lineært uafhængige, 22  
 linear-kombination, 22  
  
 markerede tetraedre, 77  
 markerede trekanter, 78  
 maskine, 21  
 medfølgende hængsel, 87  
  
 negativt orienteret trekant, 14  
 nye basisvektorer, 152  
 nye koordinater, 153  
 nyt koordinatsystem, 152  
  
 omparametriseres, 117  
 orienteringen, 11, 14  
 orienteringen af et tetraeder, 44  
 orienteringsfordelen, 141  
 Origo, 8  
 ortogonale enhedsvektorer, 123  
  
 parabel, 128, 133  
 pil, 8, 36  
 pitch, 161  
 plan kurve, 139  
 polær dekomposition, 95  
 positive kvadratrødder, 62, 63  
  
 positivt orienteret trekant, 14  
 pyramide, 40, 204  
 pyramider, 37  
  
 regulær parameterfremstilling, 114, 187  
 regulær trekant, 12  
 regulært tetraeder, 44  
 rotationsmatricer, 61  
 rotationsmatrix, 61  
 rumfang, 37  
 Rumfanget af det parametriserede område, 195  
 rumligt område, 195  
 Rumproduktet, 43  
 rumproduktet, 127  
  
 similære, 149, 156  
 similaritetstransformationen, 149  
 singulær, 114  
 singulære punkter, 115  
 singulære værdier, 62, 63  
 Singular Value Decomposition, 27  
 skrue-data, 162  
 snitmetoden, 41  
 spidspunkt, 8, 36  
 stakker, 89  
 Stedvektoren, 113  
 stedvektoren, 9  
 SVD, 27  
 SVD (Singular Value Decomposition), 60  
 SVD af  $3 \times 3$ -matricer, 55  
  
 tetraeder-rum, 157  
 Tetraedre, 35, 36  
 tidsafhængig deformationsmatrix, 84  
 torus, 193  
 transponere, 10  
 treben, 36  
 tredjegradskurve, 128  
 trekant i rummet, 37  
 Trekanter, 7  
 tværvektoren, 12  
  
 uforanderlig (tiduafhængig) figur, 197  
 uforanderlig cirkelskive, 198

uforanderlig cirkelskive ekstruderes lodret, 199

uforanderlig trekant, 200

uforanderligt rektangel, 198

variabel cirkelskive, 199

variabel ellipse-skive, 199

vektor-notation, 113

velocity, 116

venstre-singulære vektorer, 62, 64

venstreskruet, 116

vindellinje, 116, 134

vinklerne, 11

DTU COMPUTE

BYGNING 303B, 2800 KGS. LYNGBY.

*E-mail adresse:* [stema@dtu.dk](mailto:stema@dtu.dk)