

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 13

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Læs alle opgaverne fra tidligere ugesedler, og læg særlig mærke til dem du har spørgsmål til.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. Forelæsning. Kort opsummering af forårets emner, oplysninger om 2-timers prøve, og kursesevaluering.

2.2. Øvelser. Nedenstående opgaver kan du arbejde på i øvelsen. Opgaverne er af den type man kan forvente i prøven. Der findes her 17 opgaver som man kan beskrive som ”ligetil”, og derefter 7 opgaver der er ”lidt svære”. (Lidt svære betyder ikke at de nødvendigvis vil tage mere tid). Til hver opgave er knyttet nogle point. Eksamen vil bestå af 100 point.

Hvor der står ”gør i hånden”, betyder det at alle relevante regninger skal skrives ned. Man kan selvfølgelig bruge Maple til at tjekke svar, hvis det er muligt.

Følgende opgaver dækker *ikke* alle mulige opgaver man kan forvente til prøven. Hvis man vil være klar til eksamen, så skal man kunne regne alle øvelser og opgaver vi har haft tidligere på ugesedlerne 1-12. Man kan også forberede sig ved at arbejde på de frivillige opgaver der står på Campusnet.

3. OPGAVER

3.1. Mere ligetil opgaver.

(1) [15 point]

Lad $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vær en (tre gange) differentiabel funktion. Det er givet at $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, og $f''(0) = 4$.

(a) Brug Taylorpolynomiet af ordens 2, til at tilnærme værdien $f(0.2)$.

(b) Det er videre givet at $|f'''(x)| \leq 1$ for all x i intervallet $] - 0.2, 0.2[$. Hvad er den største mulige fejl ved vurderingen du har fundet i (1a)?

(2) [15 point]

Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 + 2t, \\ x(0) &= 3.\end{aligned}$$

Find Taylorpolynomiet af ordens 2 ved udviklingspunkt $t_0 = 0$ til løsningen $x(t)$. (Gør i hånden).

(3) [10 point]

Find den fuldstændige løsning (x_1, x_2, x_3, x_4) til følgende ligningsystem:

$$\begin{aligned}x_1 - x_3 + x_4 &= 1, \\x_1 + x_2 &= 1.\end{aligned}$$

(4) [10 point]

Det er givet at A , B , C og X alle er $n \times n$ matricer, og A , B og C alle er regulære.(a) Løs følgende ligning for X :

$$XA + B = C,$$

dvs. isoler X .(b) Er det nødvendigt at X også er regulær? (Vink: tænk på nogle simple eksempler).

(5) [10 point]

Antag at A , B og C alle er $n \times n$ matricer, med

$$\det A = 2, \quad \det B = 3, \quad \det C = 5.$$

Find:

$$(a) \det(A^3 B^T C^{-1}).$$

$$(b) \det(-A).$$

(6) [10 point]

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 2 & c & d \\ 0 & 3 & e & f \end{bmatrix}.$$

Det er givet, at

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \quad \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} = -5.$$

Find determinanten af A .

(7) [10 point]

Hvilke af de følgende differentialligninger for $x(t)$ er lineære, og hvilke ikke? (Man behøver ikke at begrunde svar til spørgsmålet).

$$(a) x'' + x^2 = t,$$

$$(b) x' + x = t^2,$$

$$(c) x'x = 1,$$

$$(d) x'' + t = \cos(x),$$

$$(e) x' + \sin(t) + x = 2,$$

$$(f) t^2 x' + 2x = \cos(t).$$

(8) [15 point]

Skriv ned et udtryk for den fuldstændige løsning $x(t)$ til

$$t \frac{dx}{dt} - 2x = t^5, \quad t > 0.$$

Skriv løsningen som et integral. Man behøver ikke at evaluere integralet.

(9) [15 point]

Lad $z = ae^{i\theta}$, og $w = be^{i\phi}$, hvor a, b, θ og ϕ er reelle tal, $a > 0, b > 0$.

(a) Simplificere de to udtryk

$$z\bar{w} \quad \text{og} \quad \frac{z}{w}.$$

(b) Integn i den komplekse plan tallet $z\bar{w}$, for tilfældet $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, w = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

(10) [15 point]

(a) Find polære form, $re^{i\theta}$, til $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

(b) Brug polære form til at reducerer (i hånden) den følgende udtryk:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{122}.$$

(11) [10 point]

Vis, ved brug af definitionen af komplekse exponentialfunktionen, at ligningen $e^z = 0$ har intet løsning $z \in \mathbb{C}$.

(12) [15 point]

Betragt differentiaalligningen

$$(1) \quad x'' - 7x' + 12x = \sin(t).$$

Det er givet, at den fuldstændige løsning til den *homogene* ligning $x'' - 7x' + 12x = 0$ er

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{4t},$$

hvor C_1 og C_2 er arbitrær konstanter.(a) Find en partikulær løsning til den *inhomogene* ligning (1). (Gør i hånden).

(b) Skriv ned den fuldstændige løsning til ligning (1).

(13) [15 point]

Find dimensionen og en basis til hvert af følgende vektorrum:

$$(a) \quad \text{span}\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (2, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$(b) \quad \text{span}\{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$(c) \quad \text{span}\{1+x, 1+x^2, 2+x+x^2\} \subset P_2(\mathbb{R}).$$

(14) [15 point]

Find en basis for løsningsrummet til ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 0, \\x_2 + x_3 &= 0, \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0.\end{aligned}$$

(15) [15 point]

Find koordinaterne til vektor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ i forhold til basis

$$\tilde{e}_1 = (1, 2, 3), \quad \tilde{e}_2 = (0, 1, 1), \quad \tilde{e}_3 = (0, 0, 1),$$

for $\mathbb{R}^3$.

(16) [20 point]

Lad $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være lineært, med abildningsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Find en basis for kernen $\text{Ker}(f)$.(b) Find en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.

(c) Findes der en løsning til den nedenstående ligning?

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(17) [10 point]

Lad $\mathbf{D}_2$ betegne skiven af radius 2, med center $(0, 0)$ i $\mathbb{R}^2$, dvs.

$$\mathbf{D}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Betragt afbildningen $f : \mathbf{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, givet ved

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvad er arealet af billedmængden $f(\mathbf{D}_2)$?

3.2. Lidt svære opgaver.

(1) [15 point]

Hvis $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0)$ er løsning til et inhomogent lineært ligningssystem, og $x = (1, 2, 2)$ er løsning til det tilsvarende homogene ligningssystem, hvilke af de følgende er løsninger til det inhomogene ligningssystem? (Begrund svaret!)

- (a) $(2, 5, 4)$.
- (b) Summen af to løsninger til det inhomogene lineære ligningssystem.
- (c) Differensen mellem to løsninger til det inhomogene lineære ligningssystem.

(2) [15 point]

Lad

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Skriv ned alle de rækkeoperationer du vil brug for at finde trappeform til A , dvs. en list af bestemt rækkeoperationer der fører til trappeformen.
- (b) Hvis vi betragter A som en afbildningsmatrix for en lineære afbildning $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, hvad er dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$?

(3) [15 point]

- (a) Giv en kort beskrivelse for en algoritme, der kan bruges til at finde den inverse matrix til en $n \times n$ matrix.
- (b) Skriv ned *kun den første skridt* af din algoritme i tilfældet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) [10 point]

Lad a og b være reelle tal. Betragt differentialligningen:

$$x''' + ax'' + x' + bx = 0.$$

- (a) Skriv ned karakterligningen til differentialligningen.
- (b) Er det muligt at der findes præcis to reelle rødder i karakterligningen? (Begrund dit svar).

(5) [15 point]

Lad a , b og c være reelle tal. Betragt differentialligningen:

$$(2) \quad ax'' + bx' + cx = 0.$$

- (a) Skriv ned karakterligningen til differentialligningen.
- (b) Antag at $\lambda = 1 + i$ er en rod til karakterligningen. Skriv ned den fuldstændige løsning til ligning (2).

(6) [15 point]

Hvilke af de følgende er mulige basis for løsningsrummet til en homogene 2. ordens lineær differentialligning med konstanter koefficienter?

- (a) $x_1(t) = e^{2t}$, $x_2(t) = e^t$, $x_3(t) = e^{-t}$,
- (b) $x_1(t) = e^{2t}$, $x_2(t) = e^t + e^{2t}$,
- (c) $x_1(t) = e^{2t}$, $x_2(t) = 3e^{2t}$.

(7) [10 point]

Antag at $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en lineære afbildning. Er mængden $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = (1, 0, 0)\}$ et underrum af $\mathbb{R}^3$? Begrund dit svar.