DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 13
OPSUMMERING AF EFTERÅRETS EMNER

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

Læs alle opgaverne fra tidligere ugesedler, og læg særlig mærke til dem du har spørgsmål til.

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. **Forelæsning.** Kort opsummering af efterårets emner, oplysninger om 2-timers prøve, og kursusevaluering.

2.2. **Øvelser.** Nedenstående opgaver kan du arbejde på i øvelsen. Opgaverne er af den type man kan forvente i prøven. Her er nogle opgaver som man kan beskrive som "ligetil", og derefter et par opgaver der er "lidt svære". (Lidt svære betyder ikke at de nødvendigvis vil tage mere tid). Til hver opgave er knyttet nogle point. Eksamen vil bestå af 100 point.

Hvor der står "gør i hånden", betyder det at alle relevante regninger skal skrives. Man kan selvføgelig bruge Maple til at tjekke svar, hvis det er muligt. Uanset hvordan svaret er nået, skal det begrundes.

Det er vigtigt, at være opmærksom på, at følgende opgaver *ikke* dækker alle mulige opgaver man kan forvente til prøven. De er bare eksempler hvordan opgaverne vil være stillet. Hvis man vil være klar til eksamen, så skal man kunne regne alle øvelser og opgaver vi har haft tidligere på ugesedlerne 1-12. Man kan også forberede sig ved at arbejde på de ekstraopgaver der står på hjemmesiden.

3. Opgaver

3.1. **Mere ligetil opgaver.**

(1) [10 point]
Lad $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning. Det er givet, at billedrummet $f(\mathbb{R}^4) = \mathrm{span}\{(1,2,0),\ (0,0,1),(1,2,1)\}$.
  (a) Find dimensionen af billedrummet.
  (b) Find dimensionen af kernen $\mathrm{Ker}(f)$.

(2) [10 point]
En lineære afbildning f har, mht. den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^3$ afbildningsmatricen
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
Hvis det er relevant, må du brug følgende information:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
  (a) Find afbildningsmatricen for f mht. basen $b = (b_1, b_2, b_3) = ((1,1,0),\ (1,-1,0),\ (0,0,1))$.
  (b) Find koordinatmatricen, mht. basen b, for vektoren $f(b_1)$.

(3) [15 point]
Gør i hånden: Lad

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Find, i hånden, alle egenværdier til A (men ikke egenvektorerne).

(b) Til hver af følgende vektorer, svar på spørgsmålet:
Er den en egenvektor for A? Hvis ja, hvad er tilhørende egenværdi?

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Lad nu C være en regulær matrix, og set $B = CAC^{-1}$. Find egenværdierne til B.

(4) [15 point]
Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en lineær afbildning, med afbildningsmatrix A. Det er givet, at egenværdier for A er $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ og $\lambda_3 = 4$, med tilhørende egenvektorer $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, og $v_3 = (0, 1, 1)$.

(a) Giv en diagonal matrix D og en matrix V således at $D = V^{-1}AV$.

(b) Find en ortogonal matrix Q således at $D = Q^T AQ$.

(c) Find matricen A.

(5) [10 point]
Find, ved at bestemme egenværdier og egenvektorer for systemmatricen, den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 3x_2, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

(En computer må bruges til at bestemme egenværdier og egenvektorer).

(6) [15 point]
Find, ved at bestemme egenværdier og egenvektorer for systemmatricen, den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -2x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

(En computer må bruges til at bestemme egenværdier og egenvektorer).

(7) [10 point]
Givet differentiallingen

$$x''' - 2x'' + 3x' - x = 0,$$

Omform ligningen some en 1. ordens differentialligningssytem.

(8) [12 point]
Lad $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = [x_1(t),\, x_2(t)]^T$, og $\mathbf{b}(t) = [b_1(t),\, b_2(t)]^T$, og A være en 2×2 matrix. Betragt differentialligningssystem

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Det er givet at

- Svaret fra Maple til kommando *Eigenvectors(A, output = list);* er

$$\left[\left[0,\ 1\ \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]\left[3,\ 1\ \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\right]\right],$$

- Én løsning til systemet er $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet.
(b) Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelserne

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(9) [15 point]
Til hver af nedenstående lister af vektorer, bestemmer om de udgør en ortonormal basis i det relevant vektorrum:
(a) (i) $(v_1, v_2) = ((1,1),\ (1,-1))$ i $\mathbb{R}^2$.

(ii) $(v_1, v_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right)$ i $\mathbb{R}^2$.

(iii) $(v_1, v_2, v_3) = ((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,1))$ i $\mathbb{R}^3$.

(b) Find en ortonormal basis til vektorrumet $V = \operatorname{span}\{(1,1,0),\, (0,1,1)\}$.

(10) [12 point]
Lad $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 < 4\}$.
(a) Tegn den følgende 4 mægnder i planen: mængden A, det indre A°, randen ∂A, og afslutningen $\bar{A}$.
(b) Er A åben, afsluttet er ingen af delene?

(11) [10 point]
Lat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en glat funktion. Følgende værdier er givet for f, gradienten af f, og Hessematricen i punktet $(1,2)$:

$$f(1,2) = 2, \quad \nabla f(1,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Hf(1,2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Brug det approksimerende polynomium af højst anden grad for funktionen f i udviklingspunkt $(1,2)$, til at give en tilnærmelse for $f(1.1, 1.9)$.

(12) [10 point]
Lat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x + y$.
(a) Find alle stationære punkter for f.

(b) Til hvert stationært punkt, undersøg om den er et lokalt maksimumpunkt, minimumpunkt eller ingen af delene.

(13) [15 point]
Lat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x, y) = x^2 + y(2 + x + y)$.
(a) Find alle stationære punkter for f.

(b) Find den størsteværdi for f på kvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$.

3.2. **Lidt svære opgaver.**

(1) [15 point]
Lad n være et positivt heltal. Lad $P_n(\mathbb{R})$ betegne vektorummet der består af polynomier af højst grad n. Lad $L : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ være den lineær afbildning givet ved $L(p(x)) = p'(x)$, den afledet mht. variabel x.
(a) Vis, at $\lambda = 0$ er en egenværdi til L, og giv en tilsvarende egenvektor.

(b) Findes der flere egenværdi til L? Hvis ja, giv et eksempel, hvis nej, forklar hvorfor ikke.

(2) [12 point]
Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en glat funktion. Det er givet, at

$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 > 0$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(a) Vis, at hvis f har et stationært punkt, so er det et egentlig lokalt ekstremum.

(b) (Mere udfordringer): Vis, at det er ikke muligt at f har både et lokalt maksimumpunkt på et punkt (x_0, y_0) og et lokalt minimumpunkt på et andet punkt (x_1, y_1).