

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 12

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Læs igen [eNote 7: Vektorrum](#), især Afsnit 7.2, 7.3, 7.4. Kig igen på [5. Determinanter](#). Udregn determinanterne til matricerne $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. Forelæsning. Indførelse af nogle af de emner fra [eNote 8: Lineære Afbildninger](#). Vi koncentrere os om lineære afbildninger $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, især tilfældet $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- Definition på lineær afbildning $f : V \rightarrow W$.
- Lineære afbildninger som matricer.
- Billedrum: $f(V)$ og kerne: $\ker f$ for den lineære afbildning f .
- Rang af en matrix som dimensionen af billedrummet.
- Geometriske betydning af determinanten af en kvadratiske matrix.

2.2. Øvelser.

1. (Bemærk: Mængden $C^k(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{d^k f}{dx^k} \text{ eksisterer og er kontinuert}\}$, med punktvis addition og multiplikation med skalarer, er et vektorrum).

Undersøg, om følgende afbildninger er lineære.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = ax + b$ for alle $x \in \mathbb{R}$, hvor a og b er reelle konstanter og $b \neq 0$.
- (b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x_1 + x_2 + x_3$ for alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- (c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x_1 + x_2^2 + x_3^3$ for alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
- (d) $f : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$, givet ved $f(x)(t) = x'(t) + 2tx(t)$ for alle $x \in C^1(\mathbb{R})$ og $t \in \mathbb{R}$.
- (e) $f : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x(t_0)$ for alle $x \in C^0(\mathbb{R})$, hvor t_0 er et givet reelt tal.

Vink: Summen af to funktioner som eksempelvis $\sin$ og $\cos$, altså $\sin + \cos$ *defineres* ved $(\sin + \cos)(t) = \sin(t) + \cos(t)$ for alle t . Tilsvarende *defineres* funktionen $7 \sin$ ved $(7 \sin)(t) = 7 \sin(t)$ for alle t .

2. Lad $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$f(x) = (x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4, 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4)$$

for alle $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

- (a) Vis, at f er lineær og angiv afbildningsmatricen A for f mht. de sædvanlige (de kanoniske) baser i $\mathbb{R}^4$ og $\mathbb{R}^3$.
- (b) Find rangen $\rho(A)$.
- (c) Find billedrummets dimension og angiv en basis for billedrummet.
- (d) Angiv en basis for afbildningens kerne.

3. Lad (e_1, e_2) være den sædvanlige (kanoniske) basis for $\mathbb{R}^2$ og $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^4$, dvs.

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0), & e_2 &= (0, 1), \\ \tilde{e}_1 &= (1, 0, 0, 0), & \tilde{e}_2 &= (0, 1, 0, 0), & \tilde{e}_3 &= (0, 0, 1, 0), & \tilde{e}_4 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Om afbildningen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ oplyses, at den er lineær, og at

$$f(e_1) = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 \quad \text{og} \quad f(e_2) = \tilde{e}_1 - 3\tilde{e}_3 + 7\tilde{e}_4.$$

- (a) Angiv afbildningsmatricen A for f .
 (b) Tilhører vektoren $\mathbf{b} = 5\tilde{e}_1 + 3\tilde{e}_2 - 3\tilde{e}_3 + \tilde{e}_4$ billedrummet $f(\mathbb{R}^2)$?
4. Lad K betegne enhedskvadratet $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, dvs. mængden

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Brug Maple (*se filen MapleKodeUge12F12.mw på [CampusNet](#)*) til at plotte billederne af de lineære funktioner $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ med følgende afbildningsmatricer:

- (a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 (b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.
 (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Hvad er arealet af billedmængden $f(K)$ i hvert tilfælde?

5. Lad $\mathbf{D}$ betegne enhedskiven $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Brug Maple til at plotte billedet af den lineære funktion $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, med afbildningsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vink: I polære koordinater $(x, y) = (r \cos t, r \sin t)$ er enhedskiven givet ved

$$\{0 \leq r < 1, 0 \leq t < 2\pi\}$$

Hvad er arealet af billedmængden?

3. HJEMMEOPGAVER

- A Lad $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, der med hensyn til den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Angiv en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^3)$.
 (b) Vis, at vektoren $b = (6, 2, -2)$ tilhører både kernen for f og billedrummet for f .