DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 11

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

Læs eksempler 7.21, 7.22 og 7.24 i eNote 7: Vektorrum. Løs opgave 7.23.

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. **Forelæsning.** Emner fra eNote 7: Vektorrum.

- Basis og dimension af et vektorrum
- Koordinater for vektor
- Koordinatmatrix for system af vektorer

2.2. **Øvelser.** Maple må bruges i samtlige øvelser i denne uge i det omfang det er muligt.

1. Lad $a_1 = (1, -1, 2, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 3)$, $a_3 = (1, -2, 2, -1)$, $a_4 = (0, 1, -1, 3)$. Vis, at (a_1, a_2, a_3, a_4) danner en basis for $\mathbb{R}^4$, og find koordinaterne for vektoren $b = (1, 2, 3, 4)$ i forhold til denne basis.

2. I vektorrummet $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$ er givet vektorerne (polynomierne) $P_1(x) = 1 + x - 2x^2 + 2x^3$, $P_2(x) = x + x^2 - 3x^3$, $P_3(x) = 2x^3$ og $P_4(x) = 1 + 3x + x^2 + 2x^3$. Undersøg, om $P_4(x) \in \mathrm{span}\{\, P_1(x)\, ,\, P_2(x)\, ,\, P_3(x)\,\}$.

3. Undersøg følgende systemer af vektorer for lineær uafhængighed. Angiv, i hvert tilfælde, dimensionen af underrumet, der udspændes af vektorerne.

   (a) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ (i vektorrummet $C^0(\mathbb{R})$).
   (b) $\cos^2 x$, $2 - 2\sin^2 x$, $\ln(4x^2 + 5)$ (i vektorrummet $C^0(\mathbb{R})$).
   (c) $\cos x$, $\sin x$, e^{ix} (i vektorrummet $C^0(\mathbb{R})$ med skalarlegeme $\mathbb{C}$).

4. I vektorrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ er givet vektorerne
$$P_1(x) = 1 - 3x + 2x^2, \quad P_2(x) = 1 + x + 4x^2, \quad P_3(x) = 1 - 7x.$$
   (a) Vis, at $(P_1(x), P_2(x))$ er en basis for $\mathrm{span}\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$.
   (b) Undersøg om vektorerne $Q_1(x) = 1 + 5x + 9x^2$ og $Q_2(x) = 3 - x + 10x^2$ tilhører $\mathrm{span}\{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ og angiv i bekræftende fald deres koordinater mht. basis $(P_1(x), P_2(x))$.

5. I $\mathbb{R}^3$ er givet 3 vektorer
$$a_1 = (1, 0, -1), \quad a_2 = (2, 1, 1), \quad a_3 = (1, -1, 1).$$
   Vis, at (a_1, a_2, a_3) danner en basis for $\mathbb{R}^3$, og find koordinaterne for vektorerne e_1, e_2, e_3 (den sædvanlige basis) i forhold til basis (a_1, a_2, a_3).

3. Hjemmeopgaver

A Vis, at de to vektorer

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0), \quad a_2 = (0, 1, 1, 1, 1, -1),$$

udspænder samme underrum i $\mathbb{R}^6$ som de to vektorer

$$b_1 = (4, -5, -1, -5, -1, 5), \quad b_2 = (-3, 2, -1, 2, -1, -2).$$

B Vis, at vektorerne

$$b_1 = (1, 1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 0, 1, 2), \quad b_3 = (2, 1, 0, 2), \quad b_4 = (2, 1, 1, 1),$$

udgør en basis for $\mathbb{R}^4$, og angiv koordinaterne for vektorerne $(2, 1, 1, 2)$ og $(1, 0, 0, 1)$ med hensyn til denne basis.

C Vis, at vektorerne

$$x_1(t) = e^{-t} + e^{-2t}, \quad x_2(t) = e^{-t} - e^{-2t},$$

danner en basis til løsningsmængden $\mathcal{L}_{hom}$ for differentialligningen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$