

DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 11

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Undersøg i ethvert af nedenstående tilfælde, om den angivne funktion har en størsteværdi, en mindsteværdi, begge dele, eller ingen af delene. I bekræftende fald angives de pågældende værdier.

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = -x^2 + 1$.
- (2) $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = -x^2 + 1$.
- (3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = 2e^{-x}$.
- (4) $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, givet ved $f(x) = x^2 - 3x + \cos(x)$.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. **Forelæsning.** 15.8 Partielle afledede af sammensatte funktioner og eNote 18.1–18.3 Taylor's grænseformel for funktioner af to variable.

- Kædereglene for funktionen g givet ved $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ (Sætning 15.42).
- Taylorpolynomier for funktion af flere variable.
- Taylors sætning for funktion af flere variable.
- Definition af ekstremum.
- Hjælpesætning 18.12 om nødvendig betingelse for ekstremum.
- Bestemmelse af største/mindsteværdi på lukket og begrænset område (Metode 18.13).

2.2. Øvelser.

1. Udregn de partielle afledede af funktionen $F(u, v) = f(\mathbf{x}(u, v))$ ved hjælp af kædereglene, altså uden at bestemme $F(u, v)$ eksplicit, i følgende tilfælde. Brug af kædereglene skal fremtræde tydeligt.

(a) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$, $\mathbf{x}(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv)$, $u > 0$, $v > 0$.

(b) $f(x, y) = x \sinh y$, $\mathbf{x}(u, v) = (u^3 v, \ln u + \ln v)$, $u > 0$, $v > 0$.

2. (a) Bestem det approksimerende polynomium af højst anden grad for funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

i udviklingspunktet $(3, 4)$. (Håndregning eller Maple-assisteret håndregning).

- (b) Brug svar i (a) til at tilnærme længden L af diagonalen i et rektangel med sidelængder 2.9 og 4.2. Sammenlign tilnærmelsen med værdien, der fås ved brug af en computer.

3. Bestem værdimængden for funktionen f givet ved $f(x, y) = xy(2 - x - y)$ på kvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$. Håndregning eller Maple-assisteret håndregning. Tegn grafen for f på kvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$. Har f en største- og/eller en mindsteværdi i $\mathbb{R}^2$?
4. Gør i hvert af nedenstående tilfælde rede for, at den angivne funktion har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi, og bestem disse værdier (Maple-assisteret håndregning). Tegn grafen for funktionen på den givne definitions-mængder.
- (a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 3xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$
- (b) $f(x, y) = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}, \quad x \geq 1, y \geq 1, xy \leq 32.$
5. Undersøg i ethvert af nedenstående tilfælde, om den angivne funktion har en størsteværdi, en mindsteværdi, begge dele, eller ingen af delene. I bekræftende fald angives de pågældende værdier.
- (a) $f(x, y) = (x + y) \exp(-x^2 - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$
- (b) $f(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

3. HJEMMEOPGAVER

A. Givet funktionen

$$f(x, y) = \exp(x + xy - 2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Bestem de approksimerende polynomier af højest anden grad $P(x, y)$ og $Q(x, y)$ med udviklingspunkter $(0, 0)$, henholdsvis $(1, 1)$. Brug håndregning, men kontrollér resultatet med Maples *mtaylor*.
- (b) Beregn værdierne $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; sammenlign disse med $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ bestemt ved hjælp af en computer.

B. Vis, at funktionen

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

har såvel en størsteværdi som en mindsteværdi på punktmængden

$$A = \{(x, y) \mid x \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 2\},$$

og bestem disse værdier. Håndregning eller Maple-assisteret håndregning. Tegn grafen for funktionen på den givne halvcirkelskive.