DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 10

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

Læs igen eNote 1: Talrum om $\mathbb{R}^n$. Kig på Definition 7.1 i eNote 7: Vektorrum. Prøv at vise at løsningsmængden til en *homogen* 2. ordens lineær differentialligning med konstante koefficienter (Sætning 13.2) opfylder Definition 7.1 for et vektorrum.

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. Forelæsning. Emner fra eNote 7: Vektorrum

- Vektorrum;
- Linearkombination;
- Mængden af linearkombinationer: span;
- Lineær uafhængighed;
- Basis; dimension.

2.2. Øvelser. Brug gerne Maple i samtlige øvelser i denne uge i det omfang det er muligt. (Dette faktisk bør kun være til Gausselimination).

1. Undersøg, om følgende mængder er vektorrum:
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0\}$.
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$.
   (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.
   (d) Mængden af differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (e) Mængden af differentiable funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der opfylder $f(0) = 1$.

2. I vektorrummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ er givet vektorerne
$$P_1(x) = 1 + x - 3x^2, \quad P_2(x) = 1 + 2x - 3x^2, \quad P_3(x) = -x + x^2.$$
   Skriv vektoren $P(x) = 2 + 3x - 3x^2$ som en linearkombination af $P_1(x)$, $P_2(x)$ og $P_3(x)$. (Vink: Problemet er ækvivalent med et problem i $\mathbb{R}^3$, hvis man identificere monomiebasen 1, x, x^2 med den sædvanlige basis $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.)

3. Lad $v_1 = (7, 9, 13, 0)$, $v_2 = (2, 3, -9, 4)$ og $v_3 = (0, 1, 0, 1)$. Undersøg, om $a \in \mathbb{R}$ kan vælges så $(1, 2, 3, a) \in \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$.

4. Undersøg for ethvert af følgende systemer af vektorer om det er lineært uafhængigt:
   (a) $(1, 2, 1, 0)$, $(2, 7, 3, 1)$, $(3, 12, 5, 2)$ (i vektorrummet $\mathbb{R}^4$).
   (b) $v_1 = 1 + 2x + x^2$, $v_2 = 2 + 7x + 3x^2 + x^3$, $v_3 = 3 + 12x + 5x^2 + 2x^3$ (i vektorrummet $\mathrm{P}_3(\mathbb{R})$).
   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 3}$).

5. Bestem en basis for løsningsrummet til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ x_3 - x_4 - 5x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0. \end{aligned}$$

6. (a) Brug Sætning 13.2 *Løsning til den homogene ligning* for en differentialligning af 2. orden med konstanter koefficienter til at finde dimensionen af vektorummet L_{hom}.

   (b) Hvilke af de følgende er mulige baser for løsningsrummet til en homogene 2. ordens lineær differentialligning med konstanter koefficienter?
   (i) $x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = e^{t}, \quad x_3(t) = e^{-t}$,
   (ii) $x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = e^{t} + e^{2t}$,
   (iii) $x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = 3e^{2t}$.

3. Hjemmeopgaver

A Undersøg, om matricerne

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -16 & 4 \end{bmatrix},$$

er lineært afhængige eller lineært uafhængige i vektorrummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

B Bestem den værdi for a, for hvilke vektorerne i $\mathbb{R}^3$, $(1,2,3)$, $(-1,0,2)$, og $(1,6,a)$ er lineært afhængige.

C Undersøg om følgende tre polynomier, opfattet som vektorer i vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$, er lineært afhængige eller lineært uafhængige:

$$P_1(x) = 1 - x, \quad P_2(x) = x(1-x), \quad P_3(x) = 1 - x^2.$$