DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 10

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

Læs igen om kædereglen i 14.4.3 Differentiation af sammensatte funktioner. Løs opgave 14.22, som findes der.

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. **Forelæsning.** Emner fra eNote 15: Funktioner af to variable og en lille del om gradient vektorfelter som findes i eNote 16: Gradienter og tangentplaner.

- Differentiabilitet for $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.
- Partiel differentiation.
- Tangentplan.
- Kædereglen for funktionen g givet ved $g(t) = f(X(t), Y(t))$.
- Gradient og niveaukurve.

2.2. **Øvelser.** *Se Maplefilen "MaplekommandoerUge10.mw", der findes på CampusNet.*

1. Brug Sætning 15.36 ("fra partielle afledede til differentiabilitet") til at vise, at følgende funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er differentiable:

   (a) $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

   (b) $f(x, y) = \frac{x+y}{2+\cos(x)}$.

2. Det kan vises, at hvis en funktion af flere variable er differentiabel i et punkt $\mathbf{x_0}$, så også er den *kontinuert* i $\mathbf{x_0}$. Brug dette til at vise, at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, givet ved
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$
   ikke er differentiabel i $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

3. Bestem i ethvert af nedenstående tilfælde gradienten af den angivne funktion af to variable. Tegn også niveaukurver og gradientfelt i samme koordinatsystem (på en passende rektangel i $\mathbb{R}^2$) vha. contourplot og gradplot.

   (a) $f(x, y) = \mathrm{Arctan}(x/y), \quad y \neq 0$.

   (b) $f(x, y) = \ln\frac{3+xy}{4+\sin y}, \quad xy > -3$.

4. Bestem i ethvert af nedenstående tilfælde gradienten af den angivne funktion af tre variable. Tegn også niveauflader og gradientfelt i samme koordinatsystem vha. implicitplot og gradplot3d.

   (a) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

   (b) $f(x, y, z) = \exp(x^2 - y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Udregn den afledede af funktionen $F(u) = f(\mathbf{x}(u))$ ved hjælp af kædereglen, altså uden at bestemme $F(u)$ eksplicit, i nedenstående tilfælde. Brug gerne Maples *diff* til mellemregninger, men brugen af kædereglen skal fremtræde tydeligt. Kontrollér resultatet ved at bruge Maples *diff* direkte på $F\,(u)$.

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \mathbf{x}(u) = \left(u^2, \frac{3u}{1+u}\right), \quad u > -1.$

   (b) $f(x, y) = ye^x, \quad \mathbf{x}(u) = (\text{Arctan}(1 + u), e^u), \quad u \in \mathbb{R}.$

6. Find i ethvert af følgende tilfælde en ligning for tangentplanen til den angivne flade i det angivne røringspunkt. (Se definition 15.39). Tegn flade og tangentplan i samme koordinatsystem vha. Maples *plot3d*.

   (a) $z = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}, \quad (0, 0, 1).$

   (b) $z = \text{Arctan}(xy), \quad (1, 1, \frac{\pi}{4}).$

3. Ugens Mapleprocedurer

diff ***contourplot*** ***gradplot*** **gradplot3d**

4. Hjemmeopgaver

A. Vis, at funktionen f givet ved $f\,(x, y) = \exp\left(x^2 - y^2\right)\cos\left(2xy\right)$ opfylder den partielle differentialligning

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

B. Svar på samme spørgsmål som i Øvelse 5. til:

   (a) $f(x, y) = xy, \quad \mathbf{x}(u) = (x(u), y(u)) = (e^u, \cos u), \quad u \in \mathbb{R}.$

   (b) $f(x, y) = e^{xy}, \quad \mathbf{x}(u) = (3u^2, u^3), \quad u \in \mathbb{R}.$