

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 9

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Læs Sætning 3.2 om *Løsning til den homogene ligning* i [Afsnit 13](#) til eNoter. Brug sætningen til at finde ved håndregning de fuldstændige løsninger til følgende differentialligninger:

$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(2) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hvis du har tid, så læs også Metode 13.1 og løs øvelsesopgave [1.a](#) nedenfor.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. Forelæsning. Emner fra [eNote 13](#): *Lineære 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter*, og [supplerende noter](#) *n'te ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter* (HE Jensen).

- Eksistens og entydighed af løsninger til 2. ordens differentialligninger.
- Løsningsmængder og løsningsmetoder for homogene lineære differentialligninger af 2. orden med konstante koefficienter.
- Den inhomogene ligning: gættemetode og superpositionsprincippet.
- Lineære differentialligninger af n'te orden med konstante koefficienter.

2.2. Øvelser. Bemærk: Se filen *MapleKodeUge9F12* på [CampusNet](#). Maple må bruges til øvelse [3](#).

1. Løs opgaverne [\(1\)](#) og [\(2\)](#) i Foreberedelsesafsnittet, hvis du ikke har gjort det allerede. Find i hånden de fuldstændige løsninger til følgende differentialligninger:

$$(a) \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^t, \quad t \in \mathbb{R}. \text{ (Forberedelsesopgave (1) er relevant).}$$

$$(b) \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Løs i hånden (brug øvelse [1.a](#)) begyndelsesværdiproblemet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = e^t, \quad x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0.$$

3. Betragt de følgende to differentialligninger:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t, \quad LC \frac{d^2V_c}{dt^2} + RC \frac{dV_c}{dt} + V_c = V_0 \cos \omega t.$$

Disse to ligninger svarer til to forskellige fysiske fænomener. I det første tilfælde er der tale om en masse m , der bevæger sig langs en x -akse. Massen er påvirket af en fjederkraft k , en dæmper med tilhørende konstant c og en ydre kraft $F(t)$, der her sættes til $F_0 \cos(\omega t)$.

I det andet tilfælde er der tale om et elektrisk netværk bestående af en spole med selvinduktion L , en modstand R , en kondensator med kapacitet C , og en spændingsgenerator med spænding $V(t)$. Her betragtes $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

Det problem, man ønsker at løse, er i det første tilfælde at bestemme massens udsving $x(t)$ fra ligevægtstillingen, og i det andet tilfælde at bestemme spændingen $V_c(t)$ over kondensatoren. Disse to opgaver er – ejendommeligt nok – helt identiske. Dette viser sig i, at differentialligningerne til bestemmelse af $x(t)$, henholdsvis $V_c(t)$, matematisk set er ens, som det fremgår af de ovenfor angivne ligninger.

(a) Vis først, at begge differentialligninger kan bringes på formen

$$(1) \quad \frac{dx^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Her er $\alpha \geq 0$ og vi går endvidere ud fra, at $\omega > 0$.

(b) Betragt det tilfælde, hvor den ydre påvirkning er 0. Dette svarer til $F_0 = V_0 = 0$, altså

$$(2) \quad \frac{dx^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Find betingelsen for, at en løsning til ligning (2) kan antage værdien 0 uendeligt mange gange, og angiv it dette tilfælde den fuldstændige løsning til (2).

(c) Betragt dernest ligning (1) i tilfældet uden dæmpning, svarende til $\alpha = 0$. Altså

$$(3) \quad \frac{dx^2}{dt^2} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Find for ethvert $\omega > 0$ den fuldstændige løsning til (3).

(d) Sæt nu $f = 1$, og betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \omega_0^2 x = \cos \omega t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1.$$

Plot på intervallet $[-50, 50]$ løsningen til hver af de to tilfælde,

(i) $\omega = \omega_0 = 1$;

(ii) $\omega = 1, \quad \omega_0 = 2$.

Hvad er den essentielle forskel mellem de to tilfælde?

3. HJEMMEOPGAVER

A Find ved håndregning, den fuldstændige løsning til følgende differentialligning:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Karakterligningen kan løses vha. formelen $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.)

B (Opgave A kan bruges til en del af problemet). Find i hånden de fuldstændige løsninger til differentialligninger

$$(a) \quad \frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \quad \frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \quad \frac{d^3 x}{dt^3} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = e^{2t} + \cos(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tjek svaret til hver ligning ved at sætte svaret ind i differentialligningen (Maple må bruges til dette).

C Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 2 \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Brug Maple (dsolve) og plot på intervallet $[0, 20]$ de to løsninger, som opfylder:

(a) $x(0) = 0$ og $x'(0) = -1$.

(b) $x(0) = 0$ og $x'(0) = 1$.