

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 8

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Læs [siderne 4.16 – 4.20 i Matematisk Analyse 1](#), (som findes på [kursusplanen](#)) om rødder i andensgrads polynomier. Find alle rødder til $p(z) = z^2 + z + 3$ og $p(z) = 2z^2 - z + 1$. Brug svaret til at skrive $p(z) = K(z - z_1)(z - z_0)$, hvor K er konstant, til hver af de to polynomier.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. **Forelæsning.** Emner fra [eNoter 29.7-29.8](#) og *Matematisk Analyse 1* [siderne 4.16-4.31](#).

- Rødder i polynomier.
- Den binome ligning.

2.2. **Øvelser.** *Bemærk:* der findes en fil *MapleKodeUge8F12* på [CampusNet](#). Maple må bruges til at tjekke svaret til nogle af opgaverne.

- Find, uden hjælp af en computer, $\bar{z}$, $|z|$, $1/z$, og de realdele og imaginærdele $\Re(z)$ og $\Im(z)$ til de følgende tal:
 - $z = \sqrt{2}$,
 - $z = 2 - 3i$,
 - $z = 5e^{it}$, hvor $t \in \mathbb{R}$,
 - $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- Løs i hånden ligningerne $z^2 + 2z + 5 = 0$ og $z^2 - 2z + 17 = 0$. Besvar derefter spørgsmålet: Hvad er løsningerne til: $(z^2 + 2z + 5)(z^2 - 2z + 17) = 0$?
- Løs ved hjælp af *Sætning 29.27 Binom ligning løst vha. eksponentiel form*
 - $z^2 = -4$,
 - $z^2 = i$,
 - $z^3 = 1$,
 - $z^3 = i$.Indtegn løsningerne i den komplekse plan.
- Givet et polynomium $P(z)$ med reelle koefficienter af grad $n = 6$. Kan $P(z)$ have nøjagtig 3 reelle rødder, som alle har multiplicitet 1? Begrund svaret.
- Egenverdierne for en kvadratiske matrix A er beregnet ved at løse den polynomiske ligning

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

for det ukendte tal λ . Her er I den $n \times n$ enhedsmatrix, hvis A er $n \times n$. (Egenværdibegrebet vil være vigtigt senere i kurset.) Find egenverdierne for de følgende matricer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. HJEMMEOPGAVER

A Løs, ved hjælp af *Sætning 29.27 Binom ligning løst vha. eksponentiel form*, ligningerne

(a) $z^2 = 1 - i$,

(b) $z^4 = -4$,

(c) $z^3 = 1 + i$.

B Vis vha. Eulers formler $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ og $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ (eller med *Sætning 29.23: Regneregler for e^{iv}*), at nedenstående ligning er gyldig for alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(3x) \cos(5x) = \frac{1}{2} (\sin(8x) - \sin(2x)).$$