DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 7

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

- Læs den indledende afsnit i eNote 6: Geometriske vektorer.
- Læs 6.8.1 Prikproduktet af to vektorer.
- Hvis $u = (1, 1, 0)$ og $v = (1, 0, 1)$, beregn følgende:

$$u \cdot u, \qquad u \cdot v, \qquad v \cdot v \qquad |u|, \qquad |u - v|, \qquad |u + v|.$$

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. Forelæsning.

Emner fra eNote 19: Symmetriske matricer.

- Det sædvanlige skalarprodukt i $\mathbb{R}^n$.
- Symmetriske og ortogonale matricer.
- Gram-Schmidt ortogonalisering.
- Hovedsætning om symmetriske matricer: sætning 19.26.
- Positiv og negativ definite matricer.
- Kvadratisk form.

2.2. Øvelser.

Se Maplefilen "MaplekommandoerUge7.mw", der findes på CampusNet.

1. Vis ved håndkraft, at vektorerne $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ udgør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. Kontrollér resultatet i Maple ved at danne matricen Q med de 3 vektorer som søjler og derefter udregne $Q^T Q$.

2. Lad $\mathbb{R}^3$ være udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. Find en otonormal basis for løsningsrummet til den homogene lineære ligning

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

3. Undersøg hvilke af følgende matricer, der er ortogonale:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ D = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Lad $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$. Om 3×3-matricen A oplyses, at den er symmetrisk, at $Au_1 = -u_1$, og at 2 er egenværdi for A med algebraiske multiplicitet 2.
Brug gerne Maple ved besvarelsen af følgende:
   (a) Find samtlige egenvektorer hørende til egenværdien 2 .
   (b) Find A. Vink: find Λ og Q i Sætning 19.26.

5. Der er givet den symmetriske matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Reducer den kvadratiske form

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

til en form $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2$, hvor $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, og angiv en egentlig ortogonal substitution, der udfører reduktionen.

(b) Bestem samtlige talpar (p, q), således at der gælder

$$(A - pI)(A - qI) = 0,$$

hvor I er 3×3 enhedsmatricen.

6. Lad der i $\mathbb{R}^4$ være givet vektorerne

$$u_1 = (1,1,1,1), \quad u_2 = (3,1,1,3), \quad u_3 = (2,0,-2,4), \quad u_4 = (1,1,-1,3),$$

og lad $U = \text{span}\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(a) vis, at (u_1, u_2, u_3) er en basis for U, og find koordinatmatricen for u_4 med hensyn til denne basis.

(b) Lad nu $\mathbb{R}^4$ være udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. Angiv en ortonormal basis for U.

3. Ugens Mapleprocedurer

DotProduct ***Norm*** *og* ***normalize*** ***GramSchmidt***

4. Hjemmeopgaver

A. En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ har i den sædvanlige basis afbildningsmatricen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Endvidere er givet vektorerne $v_1 = (1,1,-1,1)$ og $v_2 = (1,0,1,0)$.

(a) Vis, at v_1 og v_2 er egenvektorer for f og angiv de tilsvarende egenværdier, λ_1 og λ_2. Angiv dernæst alle egenvektorer hørende til hhv. λ_1 og λ_2.

(b) Bestem en ortogonal matrix Q, så $\Lambda = Q^T A Q$ er en diagonalmatrix, og angiv Λ.

B. Lad den kvadratiske form $K(x, y, z)$ være givet ved

$$K(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2axy - 2xz$$

for alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Her er a en reel konstant.

(a) Skriv $K(x, y, z)$ på formen $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, hvor A er en symmetrisk 3×3-matrix.

(b) Plot egenværdierne for A som funktion af a ved brug af Maplekommandoen `plot(Eigenvalues(A),a=-3..3);`
Udnyt plottet til tilnærmelsesvist at bestemme et a-interval for hvilket $K(x, y, z)$ er positiv definit.