DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 6

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

Læs Kapitel 11. 1. ordens differentialligninger på eNoterne indtil Eksempel 11.3.

Det er også relevant, at kigge på Definition 8.5 (Lineær afbildning) og Eksempel 8.6 i 8.3 Lineære afbildninger. Vetorrumene V og W må betragtes som $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$.

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. **Forelæsning.** Emner fra eNote 11. 1. ordens differentialligninger og H. Elbrønd Jensen Matematisk *Analyse I* Afsnit 1.2. Separation af de variable.

- Separable differentialligninger af 1. orden
- Lineær differentialligning af 1. orden
- Panserformlen (Sætning 11.6).
- Eksistens- og entydighedssætningen (Sætning 11.9)
- Løsningsstruktur for den inhomogene ligning (Sætning 11.4)

2.2. **Øvelser.**

1. Givet følgende 6 differentialligninger:

(i) $\dot{x}(t) + x(t)^2 = t$	(ii) $\dot{x}(t) + x(t) = t^2$	(iii) $\dot{x}(t) + \sin(x(t)) = t$
(iv) $\dot{x}(t) + t^2 x(t) = 0$	(v) $\dot{x}(t) + tx(t)(1 + x(t)) = 0$	(vi) $\left(t^2 + 1\right) \dot{x}(t) + 2x\,(t) = 6$

   Afgør for hver differentialligning, om den er lineær, separabel eller ingen af delene.

2. Find ved brug af Panserformlen den fuldstændige løsning til de **lineære** differentialligninger i Opgave 1.

3. Find ved separation af de variable den fuldstændige løsning til de **separable** differentialligninger i Opgave 1. Du må bruge følgende: $\int \frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) + C$, og at løsning til ligningen $\frac{x}{1+x} = y$ er $x = \frac{y}{1-y}$.

4. Betragt nu 2. ordens-differentialligningen

$$x'' - 5x' + 6x = 6t. \tag{1}$$

   Der er ingen "Panserformel" til 2. ordens differentialligninger. I stedet kan man bruge struktursætningen, Metode 13.1, der siger, at den fuldstændige løsning er givet som $x(t) = x_p(t) + x_h(t)$, hvor x_h er den fuldstændige løsning til den *homogene* ligning. Metoder til at finde x_h diskuteres senere i kurset.

   Lige nu er det givet, at den fuldstændige løsning til den homogene ligning $x'' - 5x' + 6x = 0$ er

$$x_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t},$$

   hvor C_1 og C_2 er arbitrær konstanter.

(a) Find en partikulær løsning til den *inhomogene* ligning (1). (Vink: gæt en polynomium).
(b) Skriv, den fuldstændige løsning til ligning (1).
(c) Find løsningen til ligning (1) der opfylder begyndelsesbetingelser

$$x(0) = \frac{5}{6}, \qquad x'(0) = 0.$$

5. Se Maple filen *MapleKodeUge6F12.mw* på CampusNet.
   (a) Forsøg i Maple at løse alle 6 differentialligninger i Opgave (1.).
   (b) Find om muligt vha. Maple den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 2$ og plot løsningen på et interval omkring $t = 0$.
   (c) Plot, i de tilfælde hvor dsolve ikke kan finde en eksakt løsning, vha. DEplot den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = 2$.

3. Hjemmeopgaver

A Bestem, ved en af metoderne i Afsnit 11 på eNoter, den løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t}x = -2t^2, \quad t > 0,$$

der opfylder $f(1) = -1$.

B Bestem, ved en af de metoderne i Afsnit 11 på eNoter, den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2x = t^5, \quad t < 0.$$

C Find, ved separation af de variable, den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$3y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 4x = 0.$$

Tjek løsning ved at sætte den ind i ligningen.