

DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 6

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Løs Opgaver 3 på [Ekstra Opgaver Uge 4](#).

1.1. Forelæsning.

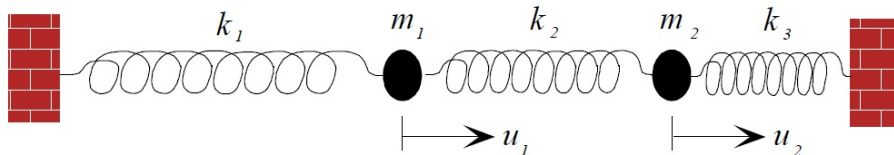
- Supplerende noter: [2. orden systemer af linære differentiaalligninger](#).
- Omskrivning som et 1. orden system.
- Specielt system.

1.2. Øvelser.

1. Givet differentiaalligningerne

$$\begin{aligned}y_1'' + 2y_2' + 2y_1 &= 15 \sin(t) \\ y_2'' + 2y_1' + 12y_2 &= 15 \cos(t)\end{aligned}\tag{1}$$

- Omskriv ved håndkraft (1) til et differentiaalligningssystem af første orden med $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_1', x_4 = y_2'$. Skriv det på formen $\dot{x} = Ax + b(t)$.
 - Find vha. Maple egenverdier og egenvektorer for A .
 - Find den fuldstændige komplekse løsning til det tilsvarende homogene system ved brug af svaret fra 1.b. (Gerne i Maple).
 - Vis ved indsættelse (gerne i Maple), at $x_p(t) = [13 \sin t \quad -\cos t \quad 13 \cos t \quad \sin t]^T$ er en partikulær løsning til det inhomogene system $\dot{x} = Ax + b(t)$ og angiv den fuldstændige komplekse løsning.
 - Hvilke reelle funktioner vil indgå i den fuldstændige reelle løsning?
2. Betragt systemet som er vist på figuren. Masserne er m_1 og m_2 og fjederkonstanterne er k_1, k_2 og k_3 .



Idet u_1 og u_2 er forskydningerne fra ligevægtsstillingen for de to masser, fås det af Newtons 2. lov, at

$$\begin{aligned}m_1 u_1'' + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 &= 0 \\ m_2 u_2'' + (k_2 + k_3) u_2 - k_2 u_1 &= 0\end{aligned}$$

Systemet kan være omskrevet til et differentiaalligningssystem af formen $\ddot{u} = Au$. Men her skal det i stedet omskrives til et system af første orden.

- Omskriv systemet til et system af første orden $\dot{x} = Ax$, idet man vælger $x_1 = u_1, x_2 = u_2, x_3 = u_1', x_4 = u_2'$.
- Lad nu $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ og $m_1 = m_2 = 1$. Find egenverdier og egenvektorer for systemmatricen A vha. Maple.
- Opskriv den fuldstændige komplekse løsning.

(d) Find den fuldstændige reelle løsning.

(e) Find den løsning, der opfylder begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Lad A være en $n \times n$ matrix, og betegn den karakteristiske polynomium som $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Cayley-Hamiltons sætning siger at hver matrix opfylder sit karakterligning, dvs. $p(A) = 0$. (Feks. hvis $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, gælder det at $A^2 + 2A + I = 0$). (Bemærk, at dette er nemt at vise i tilfældet A er diagonaliserbar.)

Det følger herefter, at hvis $x' = Ax$, så har man også at $p(\frac{d}{dt})x = 0$, fordi det er ikke svært at vise $p(\frac{d}{dt})x = p(A)x$.

Betragt igen systemet i øvelse 2. og stadig i det konkrete tilfælde $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ og $m_1 = m_2 = 1$. Find ved brug af Cayley-Hamiltons sætning en differentiaalligning af 4. orden, som både u_1 og u_2 opfylder. Find den fuldstændige løsning til denne differentiaalligning.

2. HJEMMEOPGAVER

- A. Betragt igen partiklerne i fjedersystemet i øvelse 2., men denne gang med en hastighedsafhængig lineær dæmpning. Newtons 2. lov giver nu

$$\begin{aligned} m_1 u_1'' + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + c_1 u_1' &= 0 \\ m_2 u_2'' + (k_2 + k_3) u_2 - k_2 u_1 + c_2 u_2' &= 0 \end{aligned}$$

hvor $c_1, c_2 > 0$.

- Omskriv dette koblede system af to differentiaalligninger af anden orden til et system af første orden $\dot{x} = Ax$, idet man vælger $x_1 = u_1, x_2 = u_2, x_3 = u_1', x_4 = u_2'$.
 - Lad nu $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ og $m_1 = m_2 = 1$ og $c_1 = c_2 = c > 0$. Find egenverdier og egenvektorer for systemmatricen A vha. Maple. Disse størrelser vil afhænge af c .
 - Opskriv den fuldstændige komplekse løsning.
 - For hvilke værdier af c er
 - alle (ikke-trivielle) løsninger svingninger?
 - nogle løsninger svingninger, andre ikke?
 - ingen løsninger svingninger?
- B. Betragt systemet i hjemmeopgave 1 og stadig i det halvkongkrete tilfælde $k_1 = k_2 = k_3 = 1, m_1 = m_2 = 1$ og $c_1 = c_2 = c > 0$.
- Find ved brug af Cayley-Hamiltons sætning en differentiaalligning af 4. orden, som både u_1 og u_2 opfylder.
 - Betragt nu begyndelsesbetingelserne $u_1(0) = 1, u_2(0) = 0, u_1'(0) = u_2'(0) = 0$. Vis vha. de oprindelige differentiaalligninger, at $u_1''(0) = -2$ og $u_1'''(0) = 2c$ og løs nu 4. ordens differentiaalligningen for u_1 vha. Maple, når $c = \frac{1}{6}$. Tegn løsningens graf på intervallet $[0, 50]$.