

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 5

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Læs igen sætningerne 3.3 og 3.13 i [3. Matricer og Matrixalgebra](#) om regneregler for matricer. Hvis A , B , C og D er matricer (af passende størrelse) og k er et tal, hvilke af de følgende 3 udtryk er nødvendigvis lig med hindanden?

$$B(kA + C)D, \quad kABD + BCD, \quad BCD + kBAD.$$

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. **Forelæsning.** Emner fra [4. Kvadratiske matricer](#) og [5.1-5.4. Determinanter](#).

- Kvadratiske matricer, invers matrix.
- Determinanten af en $n \times n$ matrix.
- Egenskaber af determinanter.

2.2. **Øvelser.** *Bemærk:* Se filen [MapleKodeUge05F12.mw](#) på CampusNet. Maplekommandoen “ A^{-1} ” må bruges kun til at tjekke svar i denne uge. Men brug `ReducedRowEchelonForm` til rækkeoperationer, ellers vil du bruge for meget tid om Gausselimination.

1. Givet matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Udregn ved håndregning AB og BA . Angiv, om muligt, ved brug af formelen (5-3) i eNoterne, følgende udtryk: A^{-1} , B^{-1} og $(AB)^{-1}$.

2. Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Find A^{-1} ved Gausselimination af totalmatricen $[A|I]$ (metode 4.4). Maple `ReducedRowEchelonForm` må bruges.
- (b) Find, ved brug af svaret til (a), løsningen til hver af de to matrixligninger

$$AX = B, \quad XA = B,$$

når

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Undersøg, ved Gausselimination, om matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

er invertible, og find i givet fald den inverse.

4. I denne opgave skal man lære egenskaber af determinanten, ved at bruge dem. Derfor må Maple ikke bruges her. Sæt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Udregn $\det(A)$ og $\det(B)$ med brugen af Definition 5.6 eller 5.9.
 (b) Udregn ved brugen af resultatet ovenfor $\det(A^7)$ og $\det(A^T B)$
 (c) Forklar, hvorfor A er invertibel, og angiv $\det(A^{-1})$ og $\det(A^{-7})$.
 (d) Find, med kendskab til $\det(A)$ (se Sætning 5.16), de 3 determinanter

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5+2a & 4+3a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

5. Det er givet, at A , B og C er $n \times n$ matricer, hvor $n \in \mathbb{N}$. Det er videre givet, at $\det A \neq 0$. Vis, at matrixligningen

$$XA^T + B = C$$

har en entydig løsning X , og angiv en formel for X .

6. Hvad sker der med værdien af en determinant, når man skifter fortegn på alle elementer i en række? Når man skifter fortegn på samtlige elementer i hele matricen?

3. HJEMMEOPGAVER

- A Det er givet to matricer

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Find $(BA)^{-1}$.
 (b) Vis, at AB ikke er regulær.

B Udregn (uden en computer) determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$

- C Der er givet matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (a) Find $\det A$ og $\det B$.
 (b) Find $\det(AB)$ og $\det((A^T B)^4)$.
 (c) Angiv de værdier af a , for hvilke A er regulær og find for disse værdier af a $\det(A^{-1})$.

- D Det er givet at A , B , C og D er $n \times n$ matricer, hvor $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Angiv en tilstrækkelig betingelse for at der findes en unik løsning X til matrixligningen

$$(X^T)^{-1} A + (X^T)^{-1} B + C = D.$$

- (b) Giv, under antagelse af denne betingelse, en formel for X .