

DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 5

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Læs igen Sætning 2.36 i [2.9.2 Struktursætningen](#). Læs [Supplerende noter](#) om inhomogent systemer af lineære differentialligninger.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. Forelæsning.

- [eNote 10: Diagonalisering ved egenvektorer](#).
- [eNote 12: Lineære 1. ordens differentialligningssystemer](#).
- [Inhomogene systemer af lineære differentialligninger. Struktursætningen](#).
- Numerisk løsning af differentialligningssystem vha. Maple.

2.2. Øvelser.

1. (a) Brug Maple til at finde egenverdierne og egenvektorerne for følgende matricer:

$$a: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad c: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$d: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad e: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Brug svaret til [1.a](#) til at afgøre om hvilke matricer der er diagonaliserbar over $\mathbb{R}$.
(c) Svar på samme spørgsmål over $\mathbb{C}$.
(d) Til dem (eller den) der var diagonaliserbar over $\mathbb{R}$, angiv en diagonalmatrix Λ og en regulær matrix V , så $\Lambda = V^{-1}AV$, hvor A betegner oprindelige matricen.
2. Find ved brug af egenverdimetoden den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Find ved brug af egenverdimetoden den fuldstændige løsning til det inhomogene differentialligningssystem $\dot{x} = Ax + b$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Der er givet det inhomogene differentiaalligningssystem $\dot{x} = Ax + b(t)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 & -24 \\ 0 & -2 & 0 \\ 18 & 0 & 22 \end{bmatrix} \text{ og } b(t) = \begin{bmatrix} 16t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Find ved brug af egenværdimetoden den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x} = Ax$.
- Find en partikulær løsning af formen $x(t) = u + tv$, hvor u og v er konstante vektorer.
- Angiv den fuldstændige løsning til det inhomogene system $\dot{x} = Ax + b(t)$.

5. Betragt systemet $\dot{x} = A(t)x + b$, hvor

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ og } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bemærk, at egenværdimetoden ikke kan bruges, da matricen $A(t)$ afhænger af t . Løs systemet numerisk med begyndelsesbetingelsen $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vha. Maple DE-plot. Plot løsningen for (x_1, x_2) i x_1x_2 -planen på følgende t -intervaller: $[0, 3]$, $[0, 7]$ og $[0, 50]$.

3. HJEMMEOPGAVER

- A. For ethvert $a \in \mathbb{R}$ er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 2a + 1 & -a - 1 \\ 2a + 2 & -a - 2 \end{bmatrix}.$$

- Vis, at a er en egenværdi for A .
- Bestem samtlige egenværdi og egenvektorer for A .
- Gør rede for, at A er diagonaliserbar (over de reelle tal) for ethvert $a \in \mathbb{R}$, og angiv en diagonalmatrix Λ og en regulær matrix V , så $\Lambda = V^{-1}AV$.
- Brug kun håndkraft:* Angiv Λ^{14} , og bestem dernæst A^{14} .

- B. Givet differentialligningen

$$y''' - 3y'' - 6y' + 8y = 8e^{2t} \tag{1}$$

- Find den fuldstændige løsning til (1) ved brug af Maple.
- Omskriv ved håndkraft (1) til et differentiaalligningssystem af første orden $\dot{x} = Ax + b(t)$ med $x_1 = y, x_2 = y'$ og $x_3 = y''$.
- Find egenværdier og egenvektorer for systemmatricen A vha. Maple.
- Angiv på basis af B.c den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x} = Ax$.
- Find en partikulær løsning af formen $x(t) = e^{2t}u$, hvor u er en konstant vektor.
- Angiv den fuldstændige løsning til det inhomogene system $\dot{x} = Ax + b(t)$.