

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 4

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

Gennemgå de ting der blev gennemgået sidste uge. Vi fortsætter med dette. Løs opgaverne (1)-(3) på [Frivillige øvelser, uge 3](#).

2. AKTIVITETER MANDAG FRA 13-17

2.1. **Forelæsning.** [3. Matricer og Matrixalgebra](#) og [2.9 Løsningsmængders lineære struktur](#)

- Matrixalgebra: Sum og produkt af matricer. Multiplikation med skalar.
- Transponering af en matrix.
- Et lineært ligningssystem som en matrix ligning.
- L_{hom} , L_{inhom} og struktursætningen.

2.2. **Øvelser.** *Bemærk:* Se filen [MapleKodeUge04F12.mw](#) på CampusNet for kommandoer man kan bruge i denne uge. Maple kommandoen *LinearSolve* må ikke bruges i denne uge, bortset fra at kontrollere svar.

1. Dette er en øvelse som vil hjælpe med at forstå matrixoperationer, men kun hvis man regne dem i hånden. (Svar kan kontrolleres med Maple).

$$\text{Givet matricerne } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Udregn ved håndkraft, om muligt, $2A - 3B$, $2A^T - 3B^T$, $2A - 3B^T$, AB , AB^T , BA^T , $B^T A$ og $A^T B$.

2. Løs matrixligningen $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Vink: Transponér!
(Maple kan bruges til at finde trappeform).

3. (a) Find den fuldstændige løsning til ligningssystemet:

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 + 2x_3 = 0.$$

- (b) Det er givet, at $x_p = (1, 5, 11)$ er en løsning til

$$x_1 + x_2 = b_1$$

$$x_2 + x_3 = b_2$$

$$2x_2 + 2x_3 = b_3.$$

Find, ved brugen af svaret til (a), den fuldstændige løsning til dette inhomogene ligningssystem.

4. Givet matricen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Bestem (ReducedRowEchelonForm kan bruges) den fulstændige løsning til

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Brug dette til at bestemme den fulstændige løsning til matrixligningen

$$A \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Det er klart, at A er en partikulær løsning til matrixligningen

$$AX = A^2.$$

Brug svaret til 4.a til at bestemme den fuldstændige løsning til $AX = A^2$.

5. To matricer siges at kommutere, hvis $AB = BA$. Lad $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Find alle de matricer B , der kommuterer med A . Brug gerne Maple til regningerne.

6. I Sætningerne 3.13 og 3.16 har vi regneregler for matricer. Denne opgave handler om hvordan man kan *bevise* den slags regneregler. Betegn komponenten på i 'te række og j 'te søjle til en matrix A som A_{ij} . Hvis A er $m \times n$ og B er $n \times p$, er definitionen af matrixproduktet givet komponentvis ved

$$\begin{aligned} (1) \quad (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \\ &= A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{in} B_{nj} \end{aligned}$$

og transponering er givet ved $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Brug disse definitioner til at vise, at

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

3. HJEMMEOPGAVER

A Dan produktmatricerne AB og BA for de to kvadratformede matricer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Håndregning med Maplekontrol.

B Angiv alle matricer, som er løsninger til matrixligningen

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

hvor a er et vilkårligt reelt tal, forskelligt fra 0. Brug gerne Maple til regningerne.

C Hvis komponenterne i en matrix A afhænger af en parameter t , dvs. de er funktioner $A_{ij}(t)$, kan man definere den afledte $\frac{d}{dt}A(t)$ af matrix-funktionen $A(t)$ ved den indlysende komponentvis måde. Dvs. $\frac{d}{dt}A(t)$ er matricen med komponenterne givet ved $A'_{ij}(t)$. Brug definitionen (1) for matrixproduktet til at bevise produktreglen:

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt},$$

for matrix funktioner $A = A(t)$ og $B = B(t)$.