

DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 3

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

- Vi vil bruge Maple i den sidste del af øvelsen. Instruktioner til installation af Maple findes her: [om Maple](#). Man kan også bruge Maple på computerne i databarene. Men du kan spare tid i øvelsen hvis du installerer det nu, kigge på filen "MapleKodeUge03F12.mw", som findes i folderen "Maplefiler" på [CampusNet](#), og læse afsnit "Kort intro".
- Læs [1. Talrummene](#).
Find, for hver af følgende tre par af ligninger, alle løsninger $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (d.v.s. find alle mulige par af tal, x_1, x_2 , der opfylder begge ligninger).

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{array} \right. \quad (*)$$

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. Forelæsning. [2. Lineære Ligningssystemer, 2.1-2.8.](#)

- Lineære ligningssystemer, totalmatrix, koefficientmatrix.
- Strukturen af løsningsmængden til et lineært ligningssystem.
- Løsnings-algoritme: Gauss-elimination til echelonform.
- Begrebet rang.

2.2. Øvelser.

1. Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Brug rækkeoperationer (fra Følgesætning 2.10 i eNoter) til at vise, at systemet er ækvivalent med

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3, \\ -2x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 9x_3 &= 9. \end{aligned}$$

På hvert trin skal man skrive hvilken rækkeoperation der er brugt.

Brug flere rækkeoperationer til at vise, at systemet er ækvivalent med

$$\begin{aligned} x_1 &= -1, \\ x_2 &= 2, \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

2. Brug dit svar til den foregående øvelse, til at finde trappeformen for matricen

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Til hver af de tre ligningsystemer i (*) (under Forberedelse), gør følgende:
- (a) Opskriv den totalmatrix T for ligningsystemet.
 - (b) Brug rækkeoperationer til at finde trappeformen for T .
 - (c) Brug Sætningerne 2.25, 2.28, og 2.32 til at finde den fuldstændige løsning for systemet.
4. Betragt det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 &= 2, \\ 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

- (a) Opskriv totalmatricen T til systemet.
 - (b) Brug rækkeoperationer til at finde trappeformen for T , og aflæs derefter den fuldstændige løsning.
5. Opskriv et lineær ligningssystem der har som løsning skæringsmængden for de to linjer $2x + y - 1 = 0$ og $x + 4y + 2 = 0$. Opskriv totalmatricen T for systemet.

2.2.1. *Maple Øvelser.* Åben filen "MapleKodeUge03F12.mw", som findes i folderen "Maplefiler" på [CampusNet](#).

Læs afsnit "Kort intro", hvis du ikke allerede har gjort det. Kan du bruge Maple til at finde værdien $e^{i\pi}$? (Vink: svaret er faktisk et heltal). Det vil være vigtigt i kurset, at huske hvordan man intaster tallene e , i og π i Maple, fordi det ikke er indlysende!

Kig nu på de andre afsnit, og brug kommandoerne *ReducedRowEchelonForm* og *plot* til at løse følgende opgaver:

- i. (a) Plot sammen de to rette linjer i Øvelse 5, på intervallet $x \in [-2..2]$.
 (b) Brug *ReducedRowEchelonForm* til at finde trappeformen til matricen T du har fundet i Øvelse 5, og aflæs skæringspunktet for de to linjer.
- ii. Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5. \end{aligned}$$

- (a) Find trappeformen for totalmatricen T , og aflæs rangen $\rho(T)$.
- (b) Find den fuldstændige løsning til systemet.

3. HJEMMEOPGAVER

Bemærk: For alle opgaverne nedenfor, må Maple kommando `ReducedRowEchelonForm` bruges, hvis det hjælper. Men ikke andre kommandoer. Det er vigtigt, at man kan aflæse fra trappematricen både rangen og løsningsmængden for et system.

A Generelt er en ret linje i $\mathbb{R}^2$ givet ved en ligning $ax_1 + bx_2 + c = 0$, hvor a , b og c er konstanter. Det er velkendt, at der er tre muligheder for skæringsmængden mellem to rette linjer:

- (a) de skærer i ét punkt ("typisk situation"),
- (b) de skærer i uendelige mange punkt (dvs. de er sammenfaldende), eller
- (c) de skærer ikke (parallelle men ikke sammenfaldende).

Scenarierne (a), (b) og (c) om skæringsmængde ovenfor svarer til Sætninger 2.25, 2.28, og 2.32 i eNoterne¹. Hvilke scenarier svarer til hvilke sætning?

B Gør det samme som i Mapleøvelse ii. for systemet

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 9, \\2x_2 + 6x_3 &= 6, \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2.\end{aligned}$$

C Find de værdier af a , for hvilke ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2a, \\3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= a - 1, \\-4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2,\end{aligned}$$

har en løsning, og angiv for disse værdier af a den fuldstændige løsning.

D Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\x_1 - x_3 - x_4 &= 1 \\x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\-x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\-x_3 + x_4 + x_5 &= 1.\end{aligned}$$

¹på nettet, ikke på pdf-filen for eNoterne som var lagt på CampusNet – der findes dem som 2.28, 2.31 og 2.36.