DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 3

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. Forberedelse

- Læs 8.9 Similære matricer. Løs Opgaver 8.35 (nemt) og 8.37 (kan løses ved at kigge på 8.8 Aendring af afbildningsmatricen når der skiftes basis).
- Løs igen Øvelse (5) (om egenværdier) på ugeseddel08F11.

2. Aktiviteter mandag 13–17

2.1. Forelæsning.

- 8.9 Similære matricer.
- eNote 9: Egenværdier og egenvektorer.
- Definition af egenværdi og egenvektor for en lineær afbildning.
- Forbindelsen til matrixegenværdiproblemet.
- Begreberne algebraisk og geometrisk multiplicitet.

2.2. Øvelser.

(1) *Brug kun håndkraft:* Find egenværdierne og egenvektorerne til følgende matricer. Angiv den algebraiske og den geometriske multiplicitet til hver egenværdi.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) Vis, at similære kvadratiske matricer altid har de samme egenværdier. Gælder dette også for egenvektorer?

(3) Givet matricen $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -16 & 7 \end{bmatrix}$.

(a) Find egenværdierne for A og angiv deres algebraiske og geometriske multipliciteter. Håndregning med Maplekontrol.

(b) Besvar samme spørgsmål for matricen $B = \begin{bmatrix} 38 & -20 & -15 \\ 0 & 3 & 0 \\ 84 & -48 & -33 \end{bmatrix}$, men brug nu gerne udelukkende Maple.

(c) Matricen A opfattes nu som afbildningsmatrix for en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mht. den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ (den kanoniske basis for $\mathbb{R}^3$). Findes der en basis således at afbildningsmatricen mht. denne basis er en diagonalmatrix? Hvad står der i givet fald i diagonalen?

(d) Besvar samme spørgsmål for matricen B.

(4) Sporet *af en kvadratiske matrix er summen af hoveddiagonalen, dvs. hvis komponenter for* A *betegnes som* A_{ij}*, så er sporet (eller* trace*) givet ved* $\text{spor}(A) = \text{Tr}(A) = A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}$*. Ved at kigge på koefficienterne i det karateristiske polynomium* $\det(A - \lambda I)$ *kan man vise at,*

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n, \quad \text{spor} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n. \tag{1}$$

hvor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *er egenværdierne for* A*, (talt med multiplicitet).*

(a) Hvis A har *reelle* koefficienter, så er både $\det A$ og $\text{spor} A$ *reelle* tal. Men generelt vil egenværdierne for A være *komplekse* tal. Forklar, hvorfor dette ikke er i konflikt med ligninger (1).

(b) En afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ afbilder $(1, 2, 1) \to (1, 2, 1)$, $(2, 1, 0) \to (-4, -2, 0)$, og $(1, 1, 1) \to (0, 0, 0)$. Bestem det karakteriske polynomium, sporet af afbildningsmatricen samt afbildningsmatricens determinant.

(5) Lad matricerne A og B være givet ved

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Find egenværdier og egenvektorer for A og B. Angiv for begges vedkommende den algebraiske og den geometriske multiplicitet. Brug håndregning med Maplekontrol.
(b) Udregn $(A - 5I)^2$ og $(B - 5I)^2$. Brug håndregning med Maplekontrol.
(c) Vis, at vore to matricer A og B ikke er similære. Vink: Antag, at $B = V^{-1}AV$. Vis, at så gælder $(B - 5I)^2 = V^{-1}(A - 5I)^2 V$.
(Det ses af dette eksempel, at det *ikke* er tilstrækkeligt for similaritet af to matricer A og B, at de har samme egenværdier med de samme algebraiske og geometriske multipliciteter).

3. Ugens Mapleprocedurer

Eigenvectors

4. Hjemmeopgaver

A *Brug kun håndkraft:* Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, der med hensyn til den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -7 & -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis, at vektorerne $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ og $v_3 = (1, 2, -2)$ er egenvektorer for f, og angiv de tilhørende egenværdier.
(b) Vis, at $f(\mathbb{R}^3) = \text{span}\{v_1, v_3\}$.

B Afbildningsmatricen til en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Findes der en egentlig (dvs. ikke null) vektor $v \in \mathbb{R}^3$ således at $f(v) = 2v$?