

DESIGNMAT EFTERÅR 2011: UGESEDDEL 2

INSTITUT FOR MATEMATIK

1. FORBEREDELSE

- Læs igen på [eNote 8 Lineære Afbildninger](#), 8.1-8.6. Det vil være en god idé, at arbejde på [ugeseddel12F11](#) og [Ekstra opgaverUge12F11](#) fra forår.
- Læs igen din løsning til Hjemmeopgave B på [ugeseddel 09 F11](#). *Bemærk:* Denne opgave var ikke helt løst i de fleste af afleveringer!

2. AKTIVITETER MANDAG 13-17

2.1. Forelæsning.

- [8.7 Dimensionssætningen](#).
- [8.8 Aendring af afbildningsmatricen når der skiftes basis](#).
- Modellering: den harmoniske oscillator med dæmpning.

2.2. Øvelser.

- (1) Lad der i $\mathbb{R}^4$ være valgt en basis a_1, a_2, a_3, a_4 og i $\mathbb{R}^3$ være valgt en basis c_1, c_2, c_3 . en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved at

$$\begin{aligned}f(a_1) &= c_1 + c_2 + c_3, \\f(a_2) &= c_1 + c_2, \\f(a_3) &= f(a_1) - f(a_2), \\f(a_4) &= f(a_1) + 2f(a_3).\end{aligned}$$

- (a) Find afbildningsmatricen for f med hensyn til de ovenfor valgte baser.
(b) Angiv en basis for billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$.
(c) Angiv en basis for $\text{Ker}(f)$.
(d) Kontroller, at dimensionssætningen er gyldigt i dette tilfælde.
- (2) En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har følgende afbildningsmatrix (m.h.t den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^4$ og den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^3$)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Gør rede for, at vektorerne $u_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (-1, -2, 2, -1)$ og $u_3 = (2, -2, 2, -4)$ tilhører kernen for f .
(b) Find dimensionen af $\text{Ker}(f)$ samt dimensionen af billedrummet $f(\mathbb{R}^4)$.
(c) Angiv en basis for $\text{Ker}(f)$.
- (3) Find afbildningsmatricen m.h.t. den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ for den lineære afbildning f af $\mathbb{R}^3$ ind i $\mathbb{R}^3$, hvor f afbilder vektorerne $(2, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$ og $(1, 1, 0)$ i henholdsvis $(1, 4, 1)$, $(4, 2, 2)$, og $(1, 2, 1)$.
Angiv billedet af det underrum, der er udspændt af vektorerne $(1, 2, 3)$ og $(-1, 2, 0)$.

- (4) Lad afbildningen $f : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ være givet ved

$$f(x)(t) = \int_0^t x(t-s) ds$$

for alle $t \in \mathbb{R}$ og alle $x \in C^0(\mathbb{R})$.

- (a) Vis, at f er lineær. (Bør gøre i hånden).
 - (b) Vis, at underrummet U udspændt af basen $(1, \cos, \sin, \exp)$ ved f afbildes ind i sig selv. (Brug Maple til at beregne integraler).
 - (c) Angiv afbildningsmatricen for $f : U \rightarrow U$ med hensyn til den angivne basis.
- (5) I $\mathbb{R}^2$ er givet to baser: $\{a_1, a_2\}$ og $\{b_1, b_2\}$, hvor $b_1 = 2a_1 + 5a_2$ og $b_2 = a_1 + 3a_2$. Om en lineær afbildning, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, er oplyst, at $f(a_1) = b_1$ og $f(b_2) = -a_1 + 2a_2$.
- (a) Beregn afbildningsmatricen for f m.h.t basis a_1, a_2 .
 - (b) Beregn afbildningsmatricen for f m.h.t basis b_1, b_2 .

3. HJEMMEOPGAVER

- A Lad $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære afbildning, der med hensyn til den sædvanlige basis for $\mathbb{R}^3$ har afbildningsmatricen

$$F = \begin{bmatrix} 4 & -11 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lad endvidere

$$b_1 = (1, 0, 1), \quad b_2 = (1, 1, -1), \quad b_3 = (-3, -1, 0).$$

- (a) Vis, at

$$f(b_1) = b_2, \quad f(b_2) = -b_1 + b_3, \quad f(b_3) = -b_2.$$
 - (b) Vis, at b_1, b_2, b_3 udgør en basis for $\mathbb{R}^3$. Bestem afbildningsmatricen for f med hensyn til denne basis, og angiv billedrummets dimension.
- B I vektorrummet $P_2(\mathbb{R})$ er givet vektorerne $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 - x$ og $P_2(x) = 1 - 2x + x^2/2$. Lad en afbildning $f : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ være givet ved $f(P) = \frac{d}{dx}P + 2P$.
- (a) Vis, at $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ udgør en basis for $P_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Vis, at f er lineær.
 - (c) Find afbildningsmatricen for f m.h.t basen $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$.