

01007 DESIGNMAT FORÅR 2012: UGESEDDEL 1

1. FORBEREDELSE

- Læs [14.1. Definitionsmængde og værdimængde](#) på eNoter. Løs Opgave 14.3.
- Kig på [14.4. Differentiable funktioner](#) på eNoter. Løs Opgave 14.22.

2. AKTIVITETER MANDAG 13–17

2.1. Forelæsning. Emner fra [eNote 14. Elementære funktioner](#)

- Gensyn med elementære funktioner.
- Omvendt funktion generelt.
- Omvendte trigonometriske funktioner: arcsin, arccos og arctan.

2.2. Øvelser. *Bemærk: De sidste to opgaver vil tage lidt mere tid end de første tre. Prøv, at bruge cirka en time på de første tre, tage 10 minutter pause, og derefter lave de sidste to. Spørg om hjælp, hvis det ser ud som om du ikke kan nå dette mål.*

1. (Se også afsnit 14.6 på eNoter). De hyperbolske cosinus og sinus funktioner $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, er givet henholdsvis som

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (a) Vis, at

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x), & \cosh(0) &= 1, \\ \sinh'(x) &= \cosh(x), & \sinh(0) &= 0. \end{aligned}$$

- (b) Vis, at $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har en omvendt funktion, mens $\cosh$ har ikke. Find et interval $]a, b[$ således at $\cosh :]a, b[\rightarrow \cosh(]a, b[)$ har en omvendt funktion.

- (c) Vis, at $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Brug de hyperbolske cosinus og sinus funktioner, til at finde en løsning $y(t)$ til det følgende problem:

$$y''(t) = 4y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$y(0) = 1, \tag{2}$$

$$y'(0) = 1. \tag{3}$$

3. Vis, at funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, givet ved $f(x, y) = (2y, x + 1)$, er 1-1 (dvs. injektiv).

4. Det er givet, at $0 < e < \pi$. I denne øvelse vil vi undersøge hvilke af de to tal π^e og e^π , der er størst.

Mere generelt, lad a og b være positive reelle tal. Hvornår er $a^b < b^a$?

- (a) Det følger fra definitionen af en monoton voksende funktion, at den bevarer uligheder, dvs. hvis f er voksende, så er $a < b$ ækvivalent med $f(a) < f(b)$. Desuden, bevarer division med et positivt tal også uligheder.

Gør rede for, at $f(x) = \ln(x)$ er monoton voksende, og brug dette til at vise, at uligheden $a^b < b^a$ er ækvivalent med uligheden

$$\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$$

- (b) Find det største interval, hvor funktionen $g(x) = \ln(x)/x$ er monoton aftagende.

- (c) Vis nu, at $\frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$ for $a > b \geq e$. Hvilket af de to tal π^e og e^π er derfor størst?

5. I denne opgave bruger vi egenskaber af omvendte funktioner til at få information om den omvendte funktion, uden at beregne den eksplicit.

- (a) Vis, at funktionen

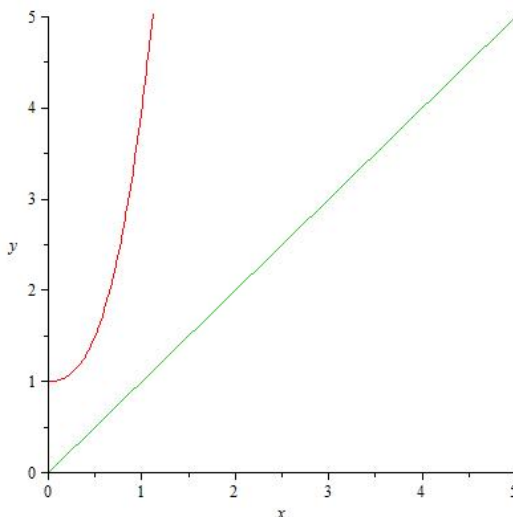
$$f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

har en omvendt funktion f^{-1} .

- (b) Brug sætning 14.24 på eNoter til at beregne $(f^{-1})'(5)$.
 (c) Grafen for den omvendte funktion fås ved at spejle grafen for f i diagonalen $y = x$ i koordinatplanen (se Figure 14.4 på eNoter). Brug dette til at beregne

$$\int_1^5 f^{-1}(y) dy.$$

Grafen for f vises på figuren nedenfor. (Vink: hvad er fortolkningen af integralet i form af areal?)



FIGUR 1. Rød: $y = 2x^3 + x^2 + x + 1$. Grøn: $y = x$.

3. HJEMMEOPGAVER

Hjemmeopgaverne er opgaver, der regnes uden for øvelsestiden. Dette betyder, at man ikke skal forvente hjælp i øvelsestiden til disse opgaver. Hjælp til øvelsesopgaverne har første prioritet.

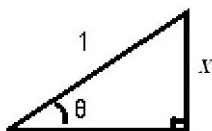
- A. Den hyperbolsk tangensfunktion er givet ved $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$. Vis, at

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

- B. Brug den geometriske definition af de trigonometriske funktioner og deres omvendte, til at vise:

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1; 1[.$$

Begynd med en figur som følger:



- C. Husk, at hvis $F'(x) = f(x)$, så siger integralregningens fundamentalsætningen at $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Udregn integralerne

(a) $\int_a^b 2 \cosh(3x)dx,$

(b) $\int_0^1 \sinh(x)dx,$

(c) $\int_{-1}^1 \sinh(x)dx,$

(d) $\int_{-1}^1 \cosh(x)dx.$

Forklarer forskellen mellem de sidste to integraler. Er der en generel regel?

4. OM AFLEVERINGSOPGAVER

Visse af hjemmeopgaverne og visse af øvelsesopgaverne skal afleveres. Der afleveres opgaver 4 gange i Forår semester. Datoerne for afleveringerne fremgår af hjemmesiden. Hvilke opgaver, der skal afleveres, vil blive offentliggjort på hjemmesiden 6 dage før afleveringstidspunktet. Den første aflevering skal være lidt kortere end de andre.