

## 1.2 SEPARATION AF DE VARIABLE

Vi betragter en differentialligning af formen

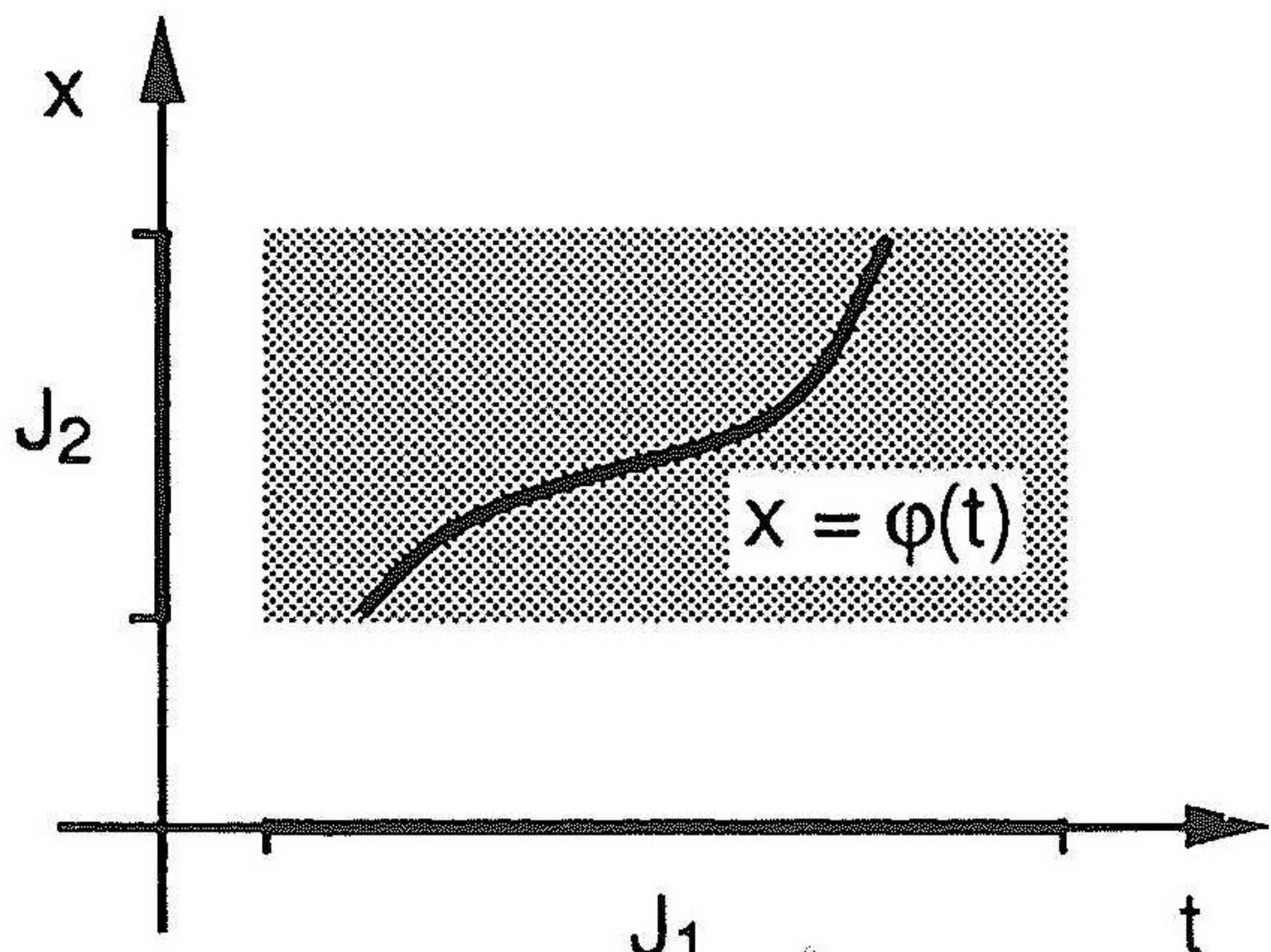
$$(1.2) \quad \frac{dx}{dt} = f(t) g(x) .$$

Det karakteristiske er her, at på højre side kan de variable  $t$  og  $x$  adskilles (separeres), idet højre side kan skrives som et produkt af to størrelser, hvor den ene kun afhænger af  $t$  og den anden kun afhænger af  $x$ . Vi vil forudsætte, at funktionerne  $f$  og  $g$  betragtes i to intervaller, betegnet henholdsvis  $J_1$  og  $J_2$ , og at  $f : J_1 \rightarrow \mathbb{R}$  og  $g : J_2 \rightarrow \mathbb{R}$  er *kontinuerte* i disse intervaller. For at præcisere intervallerne skriver vi i stedet for (1.2)

$$(1.3) \quad \frac{dx}{dt} = f(t) g(x) , \quad t \in J_1 , \quad x \in J_2 .$$

En *løsning* til (1.3) er en funktion  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in I$ , der passer ved indsættelse i (1.3).

Dette betyder, at  $\varphi(t)$  er differentielabel i sit definitionsinterval  $I$ , at  $I \subseteq J_1$ , at værdimængden for  $\varphi(t)$  ligger i  $J_2$ , og at



$$(1.4) \quad \varphi'(t) = f(t) g(\varphi(t)) , \quad t \in I .$$

Til bestemmelse af sådanne løsninger har vi følgende sætning

Sætning 1.1. Antag, at  $g(x) \neq 0$  for alle  $x \in J_2$ , og lad

$$G(x) = \int \frac{1}{g(x)} dx, \quad x \in J_2; \quad F(t) = \int f(t) dt, \quad t \in J_1.$$

En differentiabel funktion  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in I$ , er da løsning til (1.3), hvis og kun hvis der findes en konstant  $c \in \mathbb{R}$ , således at  $x = \varphi(t)$  passer i ligningen

$$(1.5) \quad G(x) = F(t) + c.$$

Bevis: At den differentiable funktion  $x = \varphi(t)$  passer i ligningen (1.5) betyder, at  $I \subseteq J_1$ , at værdimængden for  $\varphi(t)$  er indeholdt i  $J_2$ , og at

$$(1.6) \quad G(\varphi(t)) = F(t) + c, \quad t \in I.$$

Det vi skal vise er derfor, at (1.4) og (1.6) er ensbetydende. Antag først, at (1.6) er opfyldt. Ved at differentiere på begge sider fås  $G'(\varphi(t)) \varphi'(t) = F'(t)$  og dermed

$$\frac{1}{g(\varphi(t))} \varphi'(t) = f(t), \quad t \in I$$

hvilket er det samme som (1.4). Antag omvendt, at (1.4) er opfyldt, og betragt funktionen

$$H(t) = G(\varphi(t)) - F(t), \quad t \in I.$$

Ved differentiation fås

$$H'(t) = G'(\varphi(t)) \varphi'(t) - F'(t) = \frac{1}{g(\varphi(t))} \varphi'(t) - f(t).$$

Ifølge (1.4) er det sidste udtryk 0 for alle  $t \in I$ . Følgelig er  $H'(t) = 0$  i intervallet  $I$ , og  $H(t)$  er derfor konstant. Kaldes denne konstant for  $c$  fås (1.6).  $\square$

Eksempel 1.1. Lad os betragte differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = e^x \cdot e^t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Med betegnelserne i sætning 1.1 har vi  $G(x) = \int \frac{1}{e^x} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$  og  $F(t) = \int e^t dt = e^t$ . Ligningen (1.5) er derfor

$$(1.7) \quad -e^{-x} = e^t + c.$$

Vi skal dernæst bestemme de differentiable funktioner, der passer i denne ligning. Bemærk først, at da venstre side i (1.7) altid er negativ, må der gælde  $e^t + c < 0$  for alle  $t$  i definitionsintervallet for en løsning. Følgelig kan kun negative konstanter  $c$  komme på tale. Sætter vi  $c = -k$ , hvor  $k > 0$ , er  $e^t - k < 0$  for  $t < \ln k$ . For disse værdier af  $t$  kan (1.7) løses, og vi får  $x = -\ln(k-e^t)$ . Summa summarum, svarende til enhver negativ værdi af  $c$  fastlægger (1.7) en differentiel funktion med definitionsintervallet  $]-\infty, \ln k[$ , hvor  $k = -c$ . Vi angiver den fuldstændige løsning ved

$$x = -\ln(k-e^t), \quad t \in ]-\infty, \ln k[, \quad k > 0.$$

Når man i praksis skal løse en differentialligning, hvori de variable kan separeres, kan man komme frem til (1.5) ved nogle få symbolske manipulationer. Det foregår på følgende måde: I ligningen

$$\frac{dx}{dt} = f(t) g(x),$$

ganger vi på begge sider med  $dt$  og dividerer på begge sider med  $g(x)$ . Herved fås

$$\frac{1}{g(x)} dx = f(t) dt.$$

Integrator vi nu på begge sider af lighedstegnet og husker den arbitære konstant i forbindelse med stamfunktionen, får vi

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int f(t) dt + c,$$

hvilket netop er ligningen (1.5).

Det skal understreges, at der her kun er tale om rent formelle omskrivninger, der ikke i sig selv indeholder argumenter af nogen som helst art. Da vi ikke har givet symbolerne  $dx$  og  $dt$  nogen mening, kan vi naturligvis ikke med logisk konsekvens give os til at operere med dem. Overvejelser af denne art kunne lige så godt have ført til det rene vrøvl. Pointen er imidlertid her, at vi på den angivne måde kommer frem til en ligning, om hvilken vi tidligere har *bevist*, at den indeholder samtlige løsninger. Og dermed er fremgangsmåden retfærdiggjort.

**Eksempel 1.2.** Vi betragter differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-20), \quad t \geq 0, \quad x > 20.$$

Dette er den differentialligning, som vi kom frem til som matematisk model i afsnit 1.1. Går vi frem som angivet ovenfor får vi  $\frac{1}{x-20} dx = -k \cdot dt$  og dermed

$$\int \frac{1}{x-20} dx = - \int k dt + c \Leftrightarrow \ln(x-20) = -kt + c.$$

Ønsker vi specielt den løsning, for hvilken  $x(0) = T_0$ , hvor  $T_0 > 20$ , følger ved indsættelse, at  $\ln(T_0-20) = c$ . Den søgte løsning findes altså af

$$\ln(x-20) = -kt + \ln(T_0-20).$$

Ved at anvende eksponentialfunktionen på begge sider fås

$$x = 20 + e^{-kt + \ln(T_0-20)} = 20 + (T_0-20)e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

Ligningen (1.5) giver ikke noget direkte udtryk for løsningerne til (1.3). Løsningerne er kun indirekte, eller *implicit* angivet i (1.5). Ofte er det faktisk således, at vi slet ikke er i stand til at beskrive et direkte, eller *eksplicit* udtryk for løsningerne  $x = \varphi(t)$ .

**Eksempel 1.3.** Lad os se på differentialligningen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{\ln x}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in ]0, 1[.$$

Løsningerne bestemmes af ligningen  $\int (\ln x) dx = \int 2t dt + c$ , hvilken giver

$$x \ln x - x = t^2 + c .$$

Udtrykket på venstre side er her af en sådan art, at vi ikke direkte kan finde  $x$ . Det er heller ikke så ligetil at sige noget om, hvilke værdier af konstanten  $c$ , der giver anledning til løsninger, endelige hvad definitionsintervallerne for disse løsninger måtte være. Ligningen (1.5) fører altså i dette tilfælde ikke rigtig til noget.

Eksempler af denne art rejser spørgsmålet om hvad man kan gøre, hvis man ikke kan komme direkte igennem med regningerne. Det er for eksempel end ikke på forhånd klart, at der i det hele taget *findes* løsninger til differentialligningen. Vi vender tilbage til disse spørgsmål i afsnit 1.4 og afsnit 1.5.

**Sætning 1.5. (Eksistens- og entydighedssætning)**

Lad der være givet en differentialligning

$$\frac{dx}{dt} = f(t) g(x), \quad t \in J_1, \quad x \in J_2$$

hvor  $f : J_1 \rightarrow \mathbb{R}$  og  $g : J_2 \rightarrow \mathbb{R}$  begge er kontinuerte funktioner, og hvor  $g(x) \neq 0$  for alle  $x \in J_2$ . For ethvert  $t_0 \in J_1$  og ethvert  $x_0 \in J_2$  findes da netop én løsning  $x = \varphi(t)$  til denne differentialligning, for hvilken  $\varphi(t_0) = x_0$ .