

Det umiddelbare gæt på en løsning til (5.18) er en funktion $x = C e^{Bt}$, hvor C er en ubekendt kompleks konstant. Ved indsættelse i venstre side af (5.18) fås

$$C \cdot B^2 \cdot e^{Bt} + a_1 \cdot C \cdot B \cdot e^{Bt} + a_0 \cdot C \cdot e^{Bt} = C \cdot e^{Bt} [B^2 + a_1 B + a_0] .$$

Denne funktion er identisk med $A e^{Bt}$ netop hvis $C[B^2 + a_1 B + a_0] = A$. Hvis tallet i den kantede parentes er forskelligt fra 0, kan C umiddelbart bestemmes heraf (hvis tallet i den kantede parentes er lig med 0, er der ingen løsninger af formen $x = C e^{Bt}$, idet vi selvsagt antager, at $A \neq 0$).

Når vi har givet en sædvanlig reel differentialligning, kan vi søge at bestemme en løsning ved brug af den komplekse eksponentialfunktion, hvis højre side i differentialligningen kan skrives som $\operatorname{Re}[A e^{Bt}]$ eller $\operatorname{Im}[A e^{Bt}]$ for komplekse tal A og B . Hvis nemlig dette er tilfældet, betragter vi den komplekse ligning (5.18), gætter på en løsning som angivet ovenfor og benytter dernæst (5.19). Lad os notere os følgende

Hvis $A = a_1 + i a_2$ og $B = b_1 + i b_2$ gælder

$$\operatorname{Re}[A e^{Bt}] = e^{b_1 t} (a_1 \cos(b_2 t) - a_2 \sin(b_2 t))$$

$$\operatorname{Im}[A e^{Bt}] = e^{b_1 t} (a_2 \cos(b_2 t) + a_1 \sin(b_2 t))$$

(5.20)

Eksempel 5.7. Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$(*) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 13e^t \cos 2t, \quad t \in \mathbb{R} .$$

For den homogene ligning er karakterligningen $R^2 + 2R + 2 = 0$, der har rødderne $R = -1 \pm i$. Den fuldstændige løsning til den homogene ligning er derfor

$$x = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

For den inhomogene ligning bemærker vi først, at $13e^t \cos 2t = \operatorname{Re}[13e^{(1+2i)t}]$.

Vi betragter derfor den komplekse ligning

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 13e^{(1+2i)t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

og gætter på en løsning $x = C \cdot e^{(1+2i)t}$, $t \in \mathbb{R}$. Ved indsættelse fås

$$C(1+2i)^2 e^{(1+2i)t} + 2C(1+2i)e^{(1+2i)t} + 2Ce^{(1+2i)t} = 13e^{(1+2i)t}$$

$\Leftrightarrow$

$$C \cdot e^{(1+2i)t} [1 - 4 + 4i + 2 + 4i + 2] = 13e^{(1+2i)t}$$

$\Leftrightarrow$

$$C[1+8i] = 13 \Leftrightarrow C = \frac{13}{1+8i} = \frac{13(1-8i)}{65} = \frac{1-8i}{5} .$$

Funktionen

$$x = \operatorname{Re}\left[\frac{1-8i}{5} e^{(1+2i)t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1-8i}{5} e^t (\cos 2t + i \sin 2t)\right] \\ = e^t \left[\frac{1}{5} \cos 2t + \frac{8}{5} \sin 2t\right]$$

er dermed en løsning til (*), og den fuldstændige løsning til (*) er

$$x = e^t \left(\frac{1}{5} \cos 2t + \frac{8}{5} \sin 2t\right) + c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

5.5 LINEÆR DIFFERENTIALLIGNING AF N'TE ORDEN MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

Herved forstås en differentialligning

$$(5.21) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t), \quad t \in I,$$

hvor n er et naturligt tal, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ er reelle tal og $q: I \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion. En sådan differentialligning er i selve sin form helt analog til

differentialligningen (5.15), og løsning af (5.21) foregår da også, principielt set, på samme måde som løsning af den lineære differentialligning af anden orden.

Lad os først formulere det generelle resultat om eksistens af løsninger. Vi benytter her symbolet $\varphi^{(k)}(t)$ til at betegne den k -te afledede af funktionen $\varphi(t)$.

Sætning 5.5. (Eksistens- og entydighedssætning)

For ethvert talsæt $(t_0, x_0, v_1, \dots, v_{n-1})$, hvor $t_0 \in I$ og $x_0, v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}$ findes netop én løsning $x = \varphi(t)$ til differentialligningen (5.21) for hvilken

$$(5.22) \quad \varphi(t_0) = x_0, \quad \varphi^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 1, \dots, n-1$$

For $n = 2$ fås den tidligere sætning 5.1. For $n = 3$ siger sætning 5.5, at for ethvert talsæt (t_0, x_0, v_1, v_2) findes netop én løsning $x = \varphi(t)$ med $\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t_0) = v_1$ og $\varphi''(t_0) = v_2$. Bemærk, at jo større differentialligningens orden bliver, altså jo større n bliver, jo flere betingelser skal der til for at fastlægge en løsning entydigt.

Lad os dernæst indse, at (5.21) er en *lineær ligning*. I henhold til definitionen af dette begreb drejer det sig om at vise, at differentialligningen (5.21) kan skrives på formen $L(x) = q$, hvor afbildningen L opfylder betingelsen (5.13). Lad V betegne mængden af funktioner $f(t)$, der er n gange differentiable på intervallet I med $f^{(n)}(t)$ kontinuert, og lad W betegne mængden af kontinuerte funktioner på I . Vi definerer $L: V \rightarrow W$ ved

$$L(f) = f^{(n)}(t) + a_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1f'(t) + a_0f(t).$$

For vilkårlige funktioner $f_1(t)$ og $f_2(t)$ tilhørende V og vilkårlige konstanter c_1 og c_2 har vi

$$\begin{aligned} L(c_1f_1 + c_2f_2) &= c_1f_1^{(n)}(t) + c_2f_2^{(n)}(t) + a_{n-1}(c_1f_1^{(n-1)}(t) + c_2f_2^{(n-1)}(t)) \\ &\quad + \dots + a_1(c_1f_1'(t) + c_2f_2'(t)) + a_0(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) \\ &= c_1[f_1^{(n)}(t) + a_{n-1}f_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_1f_1'(t) + a_0f_1(t)] \\ &\quad + c_2[f_2^{(n)}(t) + a_{n-1}f_2^{(n-1)}(t) + \dots + a_1f_2'(t) + a_0f_2(t)] \\ &= c_1L(f_1) + c_2L(f_2). \end{aligned}$$

Dette viser, at L opfylder betingelsen (5.13), og da (5.21) åbenbart kan skrives som $L(x) = q$, har vi dermed vist det ønskede. Følgelig gælder principperne i sætning 5.4 for løsningerne til differentialligningen (5.21).

For den homogene ligning

$$(5.23) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

gætter vi på en løsning af formen $x = e^{Rt}$, hvor R er en konstant. Ved indsættelse i venstre side af (5.23) fås

$$R^n e^{Rt} + a_{n-1} R^{n-1} e^{Rt} + \dots + a_1 R e^{Rt} + a_0 e^{Rt} = (R^n + a_{n-1} R^{n-1} + \dots + a_1 R + a_0) e^{Rt}.$$

Det følger heraf, at hvis tallet R er en løsning til ligningen

$$(5.24) \quad R^n + a_{n-1} R^{n-1} + \dots + a_1 R + a_0 = 0$$

da er $x = e^{Rt}$ en løsning til (5.23). Ligningen (5.24) kaldes *karakterligningen* hørende til differentialligningen (5.23).

Lad os antage, at karakterligningen har n forskellige reelle rødder, som vi betegner med $r_1, r_2, \dots, r_n$. Funktionerne $e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}$ er da alle løsninger til (5.23), og ifølge sætning 5.4 er funktionerne

$$(5.25) \quad x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

derfor også løsninger til (5.23). Analogt til differentialligningen af anden orden kan man herefter ud fra eksistens- og entydighedssætningen (sætning 5.5) vise, at funktionerne (5.25) udgør *samtlig*e løsninger til (5.23). Dette gøres ved at indse, at for ethvert talsæt $(t_0, x_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ findes en funktion af formen (5.25), der opfylder betingelsen (5.22). Heraf følger nemlig, at der ikke kan være flere løsninger end løsningerne (5.25). Argumentet for det samlede resultat er imidlertid betydeligt sværere her end i afsnit 5.2. Sagen er den, at for ligningen af anden orden kunne vi benytte et kendt resultat om løsning af to ligninger med to ubekendte. Vi ville her have brug for det tilsvarende generelle resultat for n ligninger med n ubekendte, og dette gennemgås i faget Lineær algebra, som vi ikke kan forudsætte bekendt.

Nu er der selvsagt mange andre muligheder for rødderne i karakterligningen (5.24) end den situation hvor der er n forskellige reelle rødder. Da vi, ligesom ovenfor, ikke har forudsætninger nok til fuldt ud at behandle de forskellige tilfælde, foretrækker vi at angive det endelige resultat uden yderligere argumentation.

Sætning 5.6. Ved løsning af differentialligningen

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

finder man først rødderne i karakterligningen

$$R^n + a_{n-1} R^{n-1} + \dots + a_1 R + a_0 = 0.$$

Til enhver reel rod $R = r$ med multiplicitet p svarer der løsningerne

$$e^{rt}, te^{rt}, \dots, t^{p-1} e^{rt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Til ethvert par af konjugerede komplekse rødder $R = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$, med multiplicitet q svarer der løsningerne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, t e^{\alpha t} \cos \beta t, t e^{\alpha t} \sin \beta t, \\ \dots, t^{q-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{q-1} e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Betegnes de herved fremkomne løsninger med $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, er samtlige løsninger til differentialligningen givet ved

$$x = c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Det er værd at fremhæve den rolle, som de komplekse tal spiller for løsning af den betragtede differentialligning. Det afgørende er rødderne i karakterligningen. Hvis vi ikke havde kendskab til de komplekse tal, kunne vi kun behandle det tilfælde, hvor karakterligningen har n reelle rødder (regnet med multiplicitet). Men også i de tilfælde, hvor der *ikke* er n reelle rødder, indeholder karakterligningen altså tilstrækkeligt med information til at bestemme samtlige løsninger. Via den abstraktion, som de komplekse tal repræsenterer, bliver det muligt i alle tilfælde at konkretisere denne information, nemlig ved at finde samtlige rødder i karakterligningen, reelle som komplekse. Og det er helt centralt, at vi ved, at der inden for de komplekse tal er n rødder i (5.24). Det er denne viden, der bevirker, at vi i sætningen ovenfor altid får n løsninger $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ på den beskrevne måde, og dette er igen afgørende for, at samtlige løsninger er bestemt som angivet. Da vi ikke beviser sætningen kan vi ikke begrunde det sidste nærmere, men skal fremhæve, at Algebraens Fundamentalsætning er en central forudsætning for sætning 5.6.

Eksempel 5.8. For differentialligningen

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 5x = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

er karakterligningen $R^4 + 2R^2 + 8R + 5 = 0$. Her viser det sig, at $R = -1$ er dobbeltrod og de to øvrige rødder er $R = 1 \pm 2i$. Til dobbeltroden svarer løsningerne e^{-t} , $t e^{-t}$ og til de komplekse rødder svarer løsningerne $e^t \cos 2t$, $e^t \sin 2t$. Samtlige løsninger er herefter ifølge sætning 5.6

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t \cos 2t + c_4 e^t \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Vi vender os dernæst til den inhomogene ligning

$$(5.26) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t), \quad t \in I.$$

Som tidligere vist er dette en lineær ligning, og af sætning 5.4 fås

(5.27)

Samtlige løsninger til (5.26) fås ved til én løsning til (5.26) at addere samtlige løsninger til den homogene ligning.

Da vi ved, hvordan den homogene ligning kan løses, er det der står tilbage altså at finde blot én løsning til (5.26). Vi vil her kun omtale den mulighed at gætte en løsning, hvilket foregår på principielt set samme måde som for differentialligningen af anden orden i afsnit 5.4.

Det skal nævnes, at der findes en formel, svarende til formelen i appendix H, ved hjælp af hvilken en løsning til (5.26) kan bestemmes via udregning af en række stamfunktioner, når først løsningerne til den homogene ligning er kendt. Men vi har ikke her rådighed over de begreber, der indgår i formuleringen af denne formel.

Eksempel 5.9. Vi betragter differentialligningen

$$(*) \quad \frac{d^3x}{dt^3} - 2 \frac{dx}{dt} - 4x = t^2 + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Den homogene ligning har karakterligningen $R^3 - 2R - 4 = 0$. Denne har $R = 2$ som rod, og de øvrige rødder findes til $R = -1 \pm i$. Samtlige løsninger til den homogene ligning er derfor

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

For den inhomogene ligning benytter vi superpositionsprincippet (altså (3) i sætning 5.4) og betragter de to led på højre side i (*) hver for sig.

For ligningen

$$(**) \quad \frac{d^3x}{dt^3} - 2 \frac{dx}{dt} - 4x = t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

gætter vi på et polynomium $x = at^2 + bt + c$ som løsning. Ved indsættelse fås

$$-2(2at + b) - 4(at^2 + bt + c) = t^2 \Leftrightarrow -4at^2 - (4a + 4b)t - 2b - 4c = t^2,$$

der giver $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{8}$. Følgelig er $x = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}$ løsning til (**).

For ligningen

$$(***) \quad \frac{d^3x}{dt^3} - 2 \frac{dx}{dt} - 4x = \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

benærker vi først, at $\sin t = \operatorname{Im}[e^{it}]$. Vi ser derfor på den komplekse ligning

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 2 \frac{dx}{dt} - 4x = e^{it}, \quad t \in \mathbb{R},$$

og gætter her på en løsning $x = C \cdot e^{it}$. Ved indsættelse fås

$$C i^3 e^{it} - 2C i e^{it} - 4C e^{it} = e^{it} \Leftrightarrow C[-4 - 3i] = 1 \Leftrightarrow C = \frac{-4+3i}{25}.$$

Følgelig er $x = \operatorname{Im}\left[\frac{-4+3i}{25} e^{it}\right] = \frac{3}{25} \cos t - \frac{4}{25} \sin t$ en løsning til (***)

Den fuldstændige løsning til den oprindelige differentialligning (*) er herefter

$$x = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8} + \frac{3}{25} \cos t - \frac{4}{25} \sin t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

APPENDIX H

Vi vil her udlede en formel til bestemmelse af en løsning til den inhomogene differentialligning af anden orden

$$(5.28) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = q(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Formlen forudsætter kendskab til løsningerne til den homogene ligning, og vi får brug for følgende begreb

Definition H1. For to differentiable funktioner $\varphi_1(t)$ og $\varphi_2(t)$ er *Wronskideterminanten* $W(t)$ defineret ved

$$(5.29) \quad W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t).$$