INHOMOGENT SYSTEMER AF LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER

PREBEN ALSHOLM

0.1. Lineært differentialligningssystem af første orden.

- Vi betragtede sidst et lineært og homogent system af n differentialligninger af første orden på formen $\dot{x}(t) = Ax(t)$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- Ved et *inhomogent* lineært ligningssystem af første orden forstås et system, der kan skrives på formen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t)$$

hvor $g(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) & \cdots & g_n(t) \end{bmatrix}^T$.

0.2. Struktursætningen.

- Den fuldstændige løsning til $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(t)$ er summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x}(t) = Ax(t)$.
- Sætningen følger af den generelle struktursætning for lineære afbildninger:
- Lad $f : V \to W$ være lineær. Så er den fuldstændige løsning til ligningen $f(x) = b$ summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til den homogene ligning $f(x) = 0$.
- Her er f givet ved $f(x)(t) = \dot{x}(t) - Ax(t)$.
- Vores f er lineær, da

$$\begin{aligned} f(x+y)(t) &= \dot{(x+y)}(t) - A(x+y)(t) \\ &= \dot{x}(t) + \dot{y}(t) - Ax(t) - Ay(t) \\ &= f(x)(t) + f(y)(t), \end{aligned}$$

og da

$$\begin{aligned} f(kx)(t) &= \dot{(kx)}(t) - A(kx)(t) \\ &= k\dot{x}(t) - kAx(t) \\ &= kf(x)(t). \end{aligned}$$

0.3. **Eksempel 1 på inhomogent system.**

- Betragt systemet
$$\dot{x} = Ax + g = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 \\ -3 & -5 & 3 \\ -9 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$
- Den fuldstændige løsning til det homogene system $\dot{x}(t) = Ax(t)$ fandt vi sidst ved egenværdimetoden til
$$x(t) = c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3$$
hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, idet egenværdierne for A er -2 (med algebraisk og geometrisk multiplicitet 2) og 1, og hvor de tilhørende egenvektorer er $v_1 = [-1\ 1\ 0]^T$, $v_2 = [1\ 0\ 1]^T$ og $v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.
- Vi mangler en partikulær løsning $x_p(t)$ til $\dot{x} = Ax + g$.
- Da g er en konstant vektor, gør vi ansatsen $x_p = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ (altså en konstant vektor).

0.4. **Eksempel 1 på inhomogent system (fortsat).**

- Ansatsen $x_p = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ indsættes i $\dot{x} = Ax + g$.
- Vi får $0 = Ax_p + g$, så $Ax_p = -g$.
- Da A har en invers, er $x_p = -A^{-1}g$, men kan lettere findes ved gausselimination:
- Totalmatricen for $Ax_p = -g$ gausselimineres til reduceret echelonform
$$T = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 3 & 4 \\ -9 & -9 & 7 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -33 \end{bmatrix}$$
- Altså $x_p = \begin{bmatrix} -11 & -14 & -33 \end{bmatrix}^T$. Dermed er den fuldstændige løsning til $\dot{x} = Ax + g$ givet ved $x(t) = x_p + c_1 e^{-2t} v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^t v_3$, hvor $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

0.5. **Eksempel 2 på inhomogent system.**

- Betragt systemet $\dot{x} = Ax + g(t)$, hvor A er givet i eksempel 1, men hvor $g(t) = \begin{bmatrix} 10e^{3t} & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$.
- Vi har $g(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T = e^{3t} u + v$.
- Vi søger en partikulær løsning $x_p(t)$ og gør ansatsen $x_p = e^{3t} z + w$, hvor z og w er konstante vektorer.
- Ved indsættelse i $\dot{x} = Ax + g(t)$ fås
$$3e^{3t} z = A\left(e^{3t} z + w\right) + e^{3t} u + v$$
- Omordning giver $e^{3t}(Az - 3z + u) + Aw + v = 0$, der skal gælde for alle t.
- Heraf fås $Az - 3z + u = 0$ og $Aw + v = 0$.
- Så $w = -A^{-1} v$ og $z = -(A - 3I)^{-1} u$.
- Altså $x_p = e^{3t} z + w = -e^{3t} (A - 3I)^{-1} u - A^{-1} v$.
- Udregning giver $x_p = -e^{3t} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T$.