

DesignMat: Bevis for Metode 4.4

Hovedpunkt: De tre rækkeoperationer

$$\begin{aligned} R_i &\leftrightarrow R_j, \\ R_i &\rightarrow kR_i, \quad (k \neq 0), \\ R_i &\rightarrow R_i + kR_j, \end{aligned}$$

svarer henholdsvis til *at gange matricen på venstre side ved såkaldt elementære matricer* (se bagsiden).

Eksempel

$R_3 \rightarrow R_3 + kR_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 1+ka & 2+kb & 3+kc & 4+kd \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Konklusion

$$\text{Trap}(T) = [\text{Trap}(A) \mid \mathcal{Z}] = [\mathcal{Z}A \mid \mathcal{Z}]$$

- Hvis $\rho(A) = n$ har vi

$$[\text{Trap}(A) \mid \mathcal{Z}] = [I \mid \mathcal{Z}],$$

dvs.

$$\mathcal{Z}A = I \quad \text{og} \quad \mathcal{Z} = A^{-1}.$$

- Hvis $\rho(A) < n$ har vi

$$\text{Trap}(T) = \left[\begin{array}{c|c} * & \mathcal{Z} \\ \hline 0 \dots 0 & \end{array} \right].$$

Men det er nemt at vise, at $\rho(T) = n$. Altså har vi $\rho(A) < \rho(T)$, og systemet er *inkonsistent*.

At gange en matrix på venstre side ved matricen:

Svarer til

rækkeoperationen

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

i'te og j'te række byttet i enhedsmatrix

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

i'te række i enhedsmatrix ganget med k

$$R_i \rightarrow kR_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ekstra element på position (i,j) i enhedsmatricen

$$R_i \rightarrow R_i + kR_j$$

Metode 4.4

- Totalmatricen $T = [A \mid I]$.
- GaussJordan svarer til at gange T på venstre side ved nogle elementære matricer, $E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$:

$$\begin{aligned} [A \mid I] &\mapsto [E_1 A \mid E_1] \mapsto [E_2 E_1 A \mid E_2 E_1] \mapsto \dots \mapsto \dots \\ &\dots \mapsto [E_m E_{m-1} \dots E_2 E_1 A \mid E_m E_{m-1} \dots E_2 E_1] \\ &= \text{trappematricen } \text{Trap}(T) \end{aligned}$$

- Dvs.

$$\begin{aligned} \text{Trap}(T) &= [\text{Trap}(A) \mid *] \\ &= [\mathcal{Z}A \mid \mathcal{Z}], \end{aligned}$$

Hvor $\mathcal{Z} = E_m E_{m-1} \dots E_1$ er et produkt af elementære matricer.