

DesignMat: Uge 1

• Forelæsning Uge 1

1. Elementære funktioner og anvendelser
2. Omvendte funktioner

• I læser (mens I laver øvelserne og hjemmeopgaverne): eNote 14.6-14.8 om

- Hyperbolske funktioner og deres omvendter.
- Omvendte trigonometriske funktioner.

Elementære Funktioner

I kurset tager vi som definition af *elementære funktioner*:

Konstanter:	$f(x) = c$	c konstant $\in \mathbb{R}$
Monomier:	x^n	$n \geq 0, n$ heltal
Potensfunktioner:	x^r	$r \in \mathbb{R}, x > 0,$
Eksponential:	e^x	
Trigonometriske:	$\cos(x), \sin(x), \tan(x)$	
Logaritme:	$\ln(x)$	$x > 0$
Arcusfunktioner:	$\arccos(x), \dots$	

Sammen med alle mulige funktioner der er bygget op fra disse ved endelig mange operationer valgt fra:

$$+, -, \times, \div, \circ.$$

Eksempler for Elementære Funktioner

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

er bygget op fra:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2, \\ f_2(x) &= x^2, \\ f_3(x) &= 1, \end{aligned}$$

ved operationerne $\times$ og $+$, dvs.

$$f = f_1 f_2 + f_3,$$

som betyder

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) + f_3(x), \quad \text{for alle } x.$$

Eksempler for Elementære Funktioner

$$f(x) = \cos(2x^2 + 1)$$

er bygget op fra

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x^2 + 1, \\ f_2(x) &= \cos(x), \end{aligned}$$

ved operationen $\circ$,

dvs. *sammensætning* $f_2 \circ f_1$, som er defineret ved

$$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$$

.

Redundans

Konstanter:	$f(x) = c$	c konstant $\in \mathbb{R}$
Monomier:	x^n	$n \geq 0, n$ heltal
Potensfunktioner:	x^r	$r \in \mathbb{R}, x > 0,$
Eksponential:	e^x	
Trigonometriske:	$\cos(x), \sin(x), \tan(x)$	
Logaritme:	$\ln(x)$	$x > 0$
Arcusfunktioner:	$\arccos(x), \dots$	

Vi kan slippe x^n fra listen vi startede med, hvis vi ønsker, fordi

$$x = \ln(e^x)$$

og

$$x^n = x \times x \times \dots \times x.$$

Om Definitionsmængden

Det antages, at man bruger en passende definitionsmængde, når man bygger elementære funktioner.

Betragt for eksempel de elementære funktioner

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) &= 1, \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) &= 2 - x, \end{aligned}$$

Vi bygger en ny funktion $f = \frac{f_1}{f_2}$, dvs.

$$f(x) = \frac{1}{2 - x}.$$

Kun defineret hvis nævneren er forskellig fra nul

Kan f.eks. tage

$$Dm(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\},$$

some definitionsmængden for f .

Om Definitionsmængden

Betragt de elementære funktioner

$$\begin{aligned} f_1 :]0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) &= x^{1/2} = \sqrt{x}, \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) &= \cos(x), \end{aligned}$$

Sammensætningen: $f = f_1 \circ f_2$, dvs.

$$f(x) = \sqrt{\cos(x)}.$$

Det er nødvendigt at $\cos(x)$ tager værdi i definitionsmængden for f_1 .

Kan f.eks. bruge intervallet $] -\pi/2, \pi/2[$ some definitionsmængden for f , eller hvilken som helst mængde hvor $\cos$ tager positive værdier.

Vigtigt i Kurset

- Alle elementære funktioner er både *kontinuerte* og *differentiable* på deres definitionsmængder.
- De er bygget op fra velkendte funktioner ved $\pm, \times, \div$ og $\circ$.

Derfor kan deres afledede findes eksplicit ved de velkendte regler:

$$\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x). \end{aligned}$$