4.3 RØDDER I POLYNOMIER

Ved et komplekst polynomium af grad n forstås et udtryk af formen

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 ,$$

hvor $a_0, a_1, \dots, a_n$ er komplekse tal og hvor $a_n \neq 0$. Ved en *rod* i $P(z)$ forstås et tal $z_0 \in \mathbb{C}$, for hvilket $P(z_0) = 0$.

Man kan regne med komplekse polynomier, som man regner med reelle polynomier. Polynomier adderes og multipliceres på sædvanlig måde, og polynomiumsdivision udføres som for reelle polynomier. Ved division af $P(z)$ med et førstegradspolynomium $z-z_0$ er resten en konstant, og denne konstant er nul, hvis og kun hvis $P(z_0) = 0$. Heraf følger, som for reelle polynomier

Tallet $z = z_0$ er rod i polynomiet $P(z)$, hvis og kun hvis der findes et polynomium $Q(z)$, så

(4.20) $$P(z) = (z-z_0)\,Q(z) .$$

Inden for reelle tal har vi ingen á priori viden om, hvorvidt et polynomium har rødder eller ej. For de komplekse tal gælder derimod følgende bemærkelsesværdige sætning.

Algebraens fundamentalsætning

Ethvert komplekst polynomium $P(z)$ af grad $n \geq 1$ har mindst én rod.

Hvis $z = z_1$ er rod i $P(z)$, har vi ifølge (4.20), at $P(z) = (z-z_1)\,Q_1(z)$. Hvis graden af $P(z)$ er n, er graden af $Q_1(z)$ lig med $n-1$, og for $n \geq 2$ har $Q_1(z)$ derfor ifølge algebraens fundamentalsætning mindst én rod. Med $Q_1(z_2) = 0$ har vi $Q_1(z) = (z-z_2)\,Q_2(z)$ og dermed $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\,Q_2(z)$. Således fortsættes, og en simpel konsekvens af algebraens fundamentalsætning er altså, at der for ethvert polynomium $P(z)$ af grad $n \geq 1$ findes komplekse tal $z_1, z_2, \dots, z_n$, så

$$P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n) .$$

Tallene $z_1, z_2, \dots, z_n$ behøver ikke være forskellige. Lad os sige, at $z_1, \dots, z_s$ er de indbyrdes forskellige rødder, at faktoren $z-z_1$ optræder p_1 gange, at $z-z_2$ optræder p_2 gange, ..., og at $z-z_s$ optræder p_s gange, hvor $p_1, \dots, p_s$ er naturlige tal med $p_1+p_2+ \dots + p_s = n$. Vi har da

$$P(z) = a_n(z-z_1)^{p_1} (z-z_2)^{p_2} \dots (z-z_s)^{p_s} . \tag{4.21}$$

Med disse betegnelser siges tallet $z = z_i$ at være rod i $P(z)$ med *multiplicitet* p_i, og der gælder altså

Sætning 4.3 Ethvert polynomium $P(z)$ af grad $n \geq 1$ har inden for de komplekse tal netop n rødder, når rødderne regnes med multiplicitet.

Algebraens fundamentalsætning, der er det helt afgørende grundlag for sætning 4.3, hører til de store sætninger i den klassiske matematik. Sætningen viser, at de komplekse tal så at sige er den rigtige begrebsmæssige ramme ved diskussion af rødder i polynomier. Inden for de reelle tal har vi ingen generel viden om, hvor mange rødder der er i et polynomium af grad n. Vi ved kun generelt, at antallet af rødder ligger mellem 0 og n. Inden for de komplekse tal derimod er der altid det maksimalt mulige antal rødder, så vi ved på forhånd, hvor mange vi skal lede efter.

Algebraens fundamentalsætning er en teoretisk sætning. Den fortæller os, at der *findes* en rod, men den fortæller ikke noget om, hvordan vi skal finde den. At det i det hele taget er muligt at bevise *eksistensen* af en rod uden at kunne pege på, hvad den er, kan i første omgang forekomme ejendommeligt. Men det er netop den teoretiske matematiks store styrke at kunne afklare, hvad der er muligt, uden samtidigt hermed at skulle beskæftige sig med konkrete løsningsmetoder. Et bevis for algebraens fundamentalsætning findes i appendix G.

Vi har tidligere, i kapitel 1 om differentialligninger og i kapitel 3 om stamfunktioner, mødt en tilsvarende situation, hvor vi har et grundlæggende resultat, der udtaler sig om *eksistens* af løsninger, men hvor selve dette at *finde* løsningerne er en helt anden opgave. Hvad det sidste angår skelner vi som bekendt mellem *analytiske* metoder og *numeriske* metoder. En analytisk løsningsmetode er en principiel fremgangsmåde, ved hjælp af hvilken man kan løse et problem eksakt. En numerisk løsningsmetode er en algoritme, ved hjælp af hvilken man skridtvis, under visse forudsætninger, kan tilnærme den søgte løsning.

Til bestemmelse af rødder i polynomier findes der kun et ret så begrænset antal analytiske metoder, og der er efter alt at dømme her tale om en rent principiel begrænsning. For polynomier af første, anden, tredie og fjerde grad kan man angive analytiske løsningsmetoder, men for polynomier af grad n, hvor $n \geq 5$, blev det i første halvdel af det 19. århundrede bevist, at der *ikke findes nogen generel formel* til bestemmelse af rødder. Ved en formel forstås her et udtryk opbygget ved hjælp af de 4 regningsarter og rodstørrelser. Det må derfor anses for håbløst at lede efter en generel analytisk løsningsmetode til bestemmelse af rødder i polynomier. I appendix E forklares, hvorledes man kan løse tredie– og fjerdegradsligninger. Her vil vi omtale to typer af polynomiumsligninger, nemlig *andengradsligningerne*

$$az^2 + bz + c = 0 ,$$

og de såkaldte *binome ligninger*

$$z^n - a = 0 .$$

Andengradsligningerne

Vi betragter først den specielle ligning $z^2 = a$, hvor $a = a_1 + ia_2$ er et komplekst tal. Det viser sig hensigtsmæssigt for reelle tal a_2 at operere med symbolet $\text{sign}(a_2)$, der defineres ved

$$\text{sign}(a_2) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } a_2 \geq 0 \\ -1 & \text{hvis } a_2 < 0 \end{cases} . \tag{4.22}$$

Der gælder nu følgende

Sætning 4.4 For ethvert komplekst tal $a = a_1 + ia_2$ med modulus r har ligningen

$$z^2 = a$$

to løsninger, nemlig

$$z = \pm\left[\sqrt{\frac{r+a_1}{2}} + i\cdot\mathrm{sign}(a_2)\sqrt{\frac{r-a_1}{2}}\right] . \tag{4.23}$$

Bevis. Vi udregner simpelthen kvadratet på højre side i (4.23). Dette giver

$$z^2 = \left[\sqrt{\frac{r+a_1}{2}} + i\cdot\mathrm{sign}(a_2)\sqrt{\frac{r-a_1}{2}}\right]^2 = \frac{r+a_1}{2} - \frac{r-a_1}{2} + 2i\ \mathrm{sign}(a_2)\sqrt{\frac{(r+a_1)(r-a_1)}{4}} .$$

Da $(r+a_1)(r-a_1) = r^2-a_1^2$, og da $r^2 = a_1^2 + a_2^2$ fås heraf

$$z^2 = a_1 + i\cdot\mathrm{sign}(a_2)\sqrt{a_2^2} = a_1 + i\cdot\mathrm{sign}(a_2)\cdot|a_2| = a_1 + ia_2 ,$$

idet $\mathrm{sign}(a_2)$ netop i (4.22) er defineret således, at $\mathrm{sign}(a_2)\cdot|a_2| = a_2$.

□

Lad os dernæst betragte den generelle andengradsligning $az^2 + bz + c = 0$, hvor a, b og c er komplekse tal, og $a \neq 0$. Vi benytter samme omskrivning som i det reelle tilfælde

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left[z + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left[z + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{D}{4a^2}\right] ,$$

hvor $D = b^2 - 4ac$ er ligningens *diskriminant.* Ifølge sætning 4.4 er der altid komplekse løsninger til ligningen $w^2 = D$.

Hvis w_0 betegner en vilkårlig af disse, har vi fra det ovenstående

$$az^2 + bz + c = a\left[\left[z + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{w_0^2}{4a^2}\right] = a\left[z + \frac{b}{2a} + \frac{w_0}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{w_0}{2a}\right] .$$

Da et produkt er nul, hvis og kun hvis en af faktorerne er 0, kan man umiddelbart heraf aflæse de to rødder. Der gælder altså

Sætning 4.5 For andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0 ,$$

hvor $a \neq 0$ og hvor $D = b^2 - 4ac$ betegner diskriminanten, er de to løsninger givet ved

$$z = \frac{-b \pm w_0}{2a} \tag{4.24}$$

hvor w_0 er et komplekst tal med $w_0^2 = D$.

Bemærk, at hvis a, b og c er reelle tal, og diskriminanten $D > 0$, er (4.24) den kendte løsningsformel for en andengradsligning.

Eksempel 4.6 Vi vil løse andengradsligningen

$$z^2 - (1+i)z - 2+2i = 0 .$$

Diskriminanten udregnes til

$$D = (1+i)^2 - 4(-2+2i) = 1 + i^2 + 2i + 8 - 8i = 8 - 6i .$$

Vi skal dernæst finde løsningerne til $w^2 = D = 8 - 6i$. Hertil benyttes (4.23).

For modulus af D har vi $r = \sqrt{64+36} = 10$ og dermed

$$w = \pm \left[\sqrt{\frac{10+8}{2}} - i\sqrt{\frac{10-8}{2}} \right] = \pm (3-i) \; .$$

Ifølge (4.24) er løsningerne til andengradsligningen derfor

$$z = \frac{(1+i) \; \pm \; (3-i)}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 + i \; . \end{cases}$$

De binome ligninger

Herved forstås en ligning af formen $z^n = a$, hvor a er et komplekst tal, og n er et naturligt tal. Vi antager, at $a \neq 0$ (hvis $a = 0$, er der åbenbart kun løsningen $z = 0$). Ved løsning af denne ligning er det hensigtsmæssigt at benytte modulus og argument for komplekse tal.

Vi sætter $a = r_v$ og skriver den ubekendte z på formen $z = \rho_\theta$. Ifølge (4.19) har vi

$$(\rho_\theta)^n = (\rho^n)_{n\theta} \; ,$$

og $z^n = a$ er derfor det samme som

$$(\rho^n)_{n\theta} = r_v \; , \tag{4.25}$$

hvor ρ og θ er de ubekendte. De to tal i (4.25) er ens, netop hvis de to moduli er ens og argumenterne svarer til samme halvlinie i den komplekse talplan. Dette betyder, at $\rho^n = r$ og $n\theta = v + p \cdot 2\pi$ for $p \in \mathbb{Z}$. Vi har altså $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \frac{v}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}$, og når p gennemløber tallene $0, 1, \dots , n-1$ fås herved n forskellige komplekse tal. Der gælder således

Sætning 4.6 For den binome ligning

$$z^n = a = r_v$$

hvor $a \neq 0$, er de n løsninger givet ved

$$(4.26) \qquad z = \left[\sqrt[n]{r}\,\right]_{\frac{v}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{v}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{v}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right], \quad p = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Eksempel 4.7 Vi vil finde løsningerne til den binome ligning

$$(*) \qquad z^4 = -8 + 8i\sqrt{3} .$$

For det komplekse tal $a = -8 + 8i\sqrt{3}$ har vi modulus $r = \sqrt{64 + 3 \cdot 64} = 16$, og argumentet for a opfylder $\tan v = -\sqrt{3}$. Da tallet a ligger i anden kvadrant er hovedargumentet $v = \text{Arg}(a) = \pi + \text{Arctan}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Vi har altså

$$-8 + 8i\sqrt{3} = 16_{\frac{2\pi}{3}} ,$$

og løsningerne til (*) er ifølge (4.26)

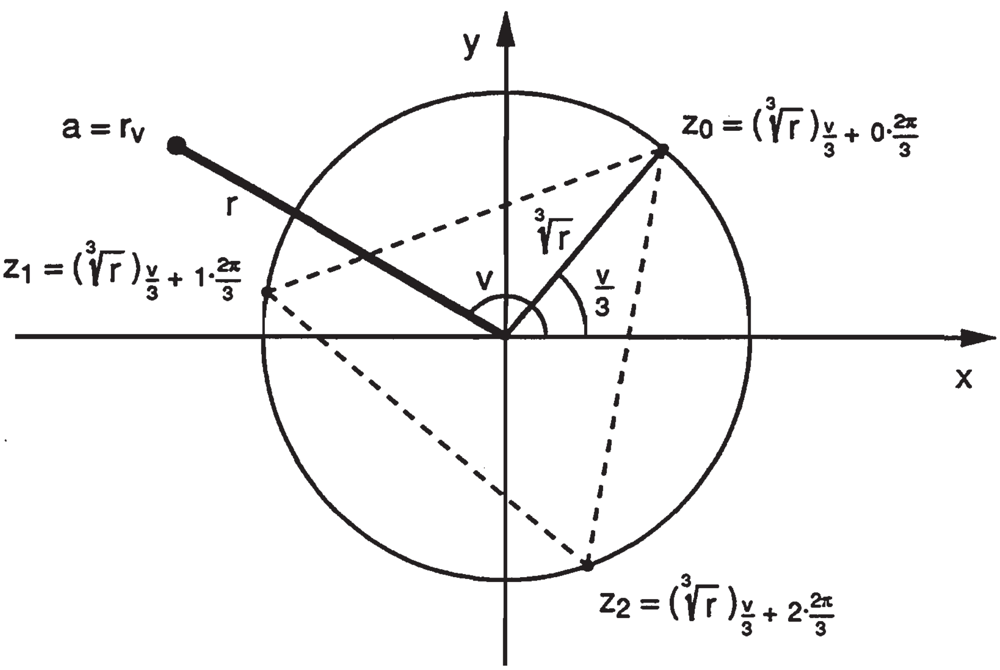
$$z = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + p \cdot \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + p \cdot \frac{2\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + p \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + p \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad p = 0, 1, 2, 3 .$$

Heraf fås de 4 løsninger

$$z_0 = \sqrt{3} + i , \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3} , \quad z_2 = -\sqrt{3} - i , \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3} .$$

Vi fremhæver, at alle løsningerne i (4.26) ligger på en cirkel med centrum i 0 og radius $\rho = \sqrt[n]{r}$, og at "naboløsninger" danner en indbyrdes vinkel på $\frac{2\pi}{n}$ (se figur).



Løsning af den binome ligning $z^3 = a$

Ved hjælp af det foregående kan vi naturligvis også løse de ligninger, der ved hjælp af en substitution kan reduceres til andengradsligninger og binome ligninger. Lad os endvidere minde om, at hvis man kan gætte eller på anden måde har kendskab til en rod $z = z_0$ i et polynomium $P(z)$, kan man ved polynomiumsdivision bestemme $Q(z)$, så $P(z) = (z-z_0)\,Q(z)$ og dernæst søge at finde rødderne i $Q(z)$.

Eksempel 4.8 Vi vil finde rødderne i polynomiet

$$P(z) = z^5 + z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 4z + 4 .$$

Her er $z = -1$ rod, og ved polynomiumsdivision fås $P(z) = (z+1)(z^4+5z^2+4)$. For at løse ligningen $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ indfører vi substitutionen $w = z^2$. Herved fås

$$w^2 + 5w + 4 = 0 ,$$

der har løsningerne $w = -1$ og $w = -4$. Af $z^2 = -1$ fås $z = \pm i$, og af $z^2 = -4$ fås $z = \pm 2i$.

De 5 rødder i $P(z)$ er derfor

$$z = -1 \,, \quad z = \pm\, i \,, \quad z = \pm\, 2i \,.$$

Efter at have gennemgået de rimeligt simple metoder, der findes til analytisk bestemmelse af rødder i polynomier, vil vi til sidst i dette afsnit omtale et mere principielt resultat. Det drejer sig om rødder i polynomier med *reelle* koefficienter, og vi vil specielt vise, at sætning 3.3 om opspaltning af reelle polynomier i faktorer er en konsekvens af algebraens fundamentalsætning.

Vi får her brug for begrebet det *konjugerede* tal til et komplekst tal, og minder fra (4.16) om, at det konjugerede tal til $a = a_1 + ia_2$ er tallet $\bar{a} = a_1 - ia_2$. Bemærk specielt, at hvis a er et *reelt tal*, er $\bar{a} = a$. Om konjugering af komplekse tal gælder følgende regler

(4.27)	$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$	for alle $a, b \in \mathbb{C}$
(4.28)	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	for alle $a, b \in \mathbb{C}$
(4.29)	$\overline{\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\bar{b}}$	for alle $b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

De 3 regler vises alle ved direkte regning. Eksempelvis, hvis $a = a_1 + ia_2$ og $b = b_1 + ib_2$, har vi $\bar{a} + \bar{b} = a_1 - ia_2 + b_1 - ib_2 = (a_1 + b_1) - i(a_2 + b_2)$, og da $a + b = (a_1+b_1) + i(a_2+b_2)$, er $\overline{a+b} = (a_1+b_1) - i(a_2+b_2)$, hvormed (4.27) er bevist. På tilsvarende måde indses (4.28) og (4.29). Vi viser dernæst

Sætning 4.7 Lad der være givet et polynomium

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \,,$$

hvor koefficienterne $a_0, a_1, \dots, a_n$ alle er *reelle tal*. Hvis $z = \alpha + i\beta$ er rod i $P(z)$, da er $\bar{z} = \alpha - i\beta$ ligeledes rod i $P(z)$.

Bevis. Af (4.27) følger, at

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}\,.$$

Ved at benytte (4.28) på ethvert af de indgående produkter fås dernæst

$$(*) \qquad \overline{P(z)} = \overline{a}_n (\overline{z})^n + \overline{a_{n-1}}\,(\overline{z})^{n-1} + \dots + \overline{a}_1 \overline{z} + \overline{a}_0\,.$$

Da alle koefficienterne er reelle, er $\overline{a}_i = a_i$ for alle $i = 0, 1, \dots, n$. Derfor er højre side i $(*)$ det samme som $P(\overline{z})$. Der gælder altså $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$, så hvis $P(z) = 0$, er følgelig også $P(\overline{z}) = 0$. □

Polynomiet i eksempel 4.8 er et polynomium med reelle koefficienter, altså det vi kalder et *reelt* polynomium. Der er 4 ikke–reelle rødder, og som det ses, er disse parvist konjugerede komplekse tal.

Lad os nu for det reelle polynomium $P(z)$ benytte faktoropløsningen (4.21)

$$(4.30) \qquad P(z) = a_n (z - z_1)^{p_1} (z - z_2)^{p_2} \dots (z - z_s)^{p_s}\,.$$

Ifølge sætning 4.7 optræder de ikke–reelle rødder i par af konjugerede tal. Hvis $z_i = \alpha + i\beta$ er rod, er $\overline{z}_i = \alpha - i\beta$ ligeledes rod, og svarende til faktoren $(z - \alpha - i\beta)^{p_i}$, har vi altså også faktoren $(z - \alpha + i\beta)^{p_i}$ i opspaltningen ovenfor.

Nu er

$$(z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) = (z - \alpha)^2 - (i\beta)^2 = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$$

og dermed

$$(4.31) \qquad (z - \alpha - i\beta)^{p_i} (z - \alpha + i\beta)^{p_i} = (z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2)^{p_i}\,.$$

Dette sidste polynomium er et *reelt* polynomium. I (4.30) tager vi nu faktorerne for de (eventuelle) reelle rødder for sig, og de øvrige faktorer samles to og to svarende til par af konjugerede ikke–reelle rødder. Det følger herefter af (4.31), at *ethvert reelt polynomium kan skrives som et produkt af reelle polynomier af første og anden grad, hvor andengradspolynomierne ikke har reelle rødder.*

Hermed har vi bevist sætning 3.3 i kapitel 3, og vi har endvidere angivet en generel metode til at bestemme den i sætningen omtalte faktoropløsning, idet vi nemlig først kan finde samtlige komplekse rødder i polynomiet og dernæst benytte den ovenfor beskrevne procedure. Sætning 3.3 er udgangspunktet for *dekomponering* af brudne rationale funktioner, og i kapitel 3 blev hovedresultatet herom formuleret i *dekompositionssætningen.* Denne sætning vises langt lettest ved først at regne inden for de komplekse tal, og herved fås i øvrigt også en generel algoritmisk metode til udførelse af dekomposition. Dette gennemgås i appendix F.

Eksempel 4.9 Vi vil bestemme faktoropløsningen for polynomiet

$$P(x) = x^6 + 8 .$$

Hertil finder vi først de komplekse løsninger til den binome ligning

$$x^6 = -8 = 8_\pi$$

Af (4.26) fås

$$x = \sqrt[6]{8}\left[\cos(\tfrac{\pi}{6} + p \cdot \tfrac{2\pi}{6}) + i \sin(\tfrac{\pi}{6} + p \cdot \tfrac{2\pi}{6})\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos(\tfrac{\pi}{6} + p \cdot \tfrac{\pi}{3}) + i \sin(\tfrac{\pi}{6} + p \cdot \tfrac{\pi}{3})\right], \quad p = 0, 1, \dots, 5 .$$

Dette giver ved udregning $x = \frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm\sqrt{2}\,i, \quad x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vi har derfor

$$P(x) = (x - \sqrt{2}i)\cdot(x + \sqrt{2}i) \cdot$$

$$\left[x - \frac{\sqrt{6}}{2} - i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cdot\left[x - \frac{\sqrt{6}}{2} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cdot$$

$$\left[x + \frac{\sqrt{6}}{2} - i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cdot\left[x + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= [x^2 + 2]\cdot\left[\left[x - \frac{\sqrt{6}}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}\right]\cdot\left[\left[x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= (x^2 + 2)(x^2 - \sqrt{6}x + 2)(x^2 + \sqrt{6}x + 2) .$$

Det er værd at standse op og tænke lidt over, hvordan vi nu har fået bevist sætning 3.3. Når man kun har kendskab til de reelle tal, er det overordentligt svært at finde generelle resultater om, hvordan et polynomium kan opløses i faktorer, endsige finde en metode efter hvilken man kan afgøre, hvad der i konkrete tilfælde er muligt. Som vi har set, er det imidlertid sådan, at når man først opererer inden for den abstraktion, som de komplekse tal er, da fremkommer der et simpelt svar på problemet. Hermed gives et markant eksempel på styrken i abstraktion, når den er bedst.

4.4 DEN KOMPLEKSE EKSPONENTIALFUNKTION

I dette afsnit vil vi udvide definitionsmængden for den kendte eksponentialfunktion e^x fra reelle tal x til komplekse tal z. Dette gøres på følgende måde

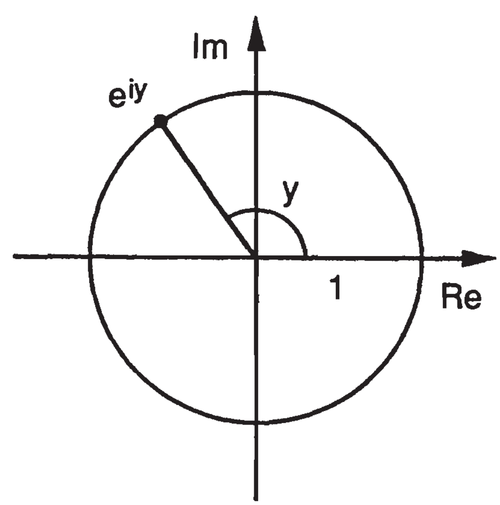
Definition 4.8 For ethvert komplekst tal $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, indføres den komplekse eksponentialfunktion e^z ved

(4.32) $$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Bemærk, at hvis z er et reelt tal, altså hvis $y = 0$, er (4.32) den sædvanlige eksponentialfunktion e^x .

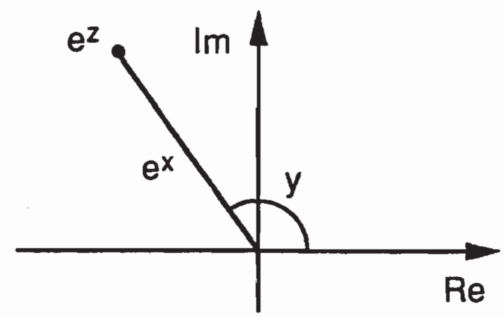
Sætter vi specielt $x = 0$ i (4.32) fås

(4.33) $$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y \ , \ y \in \mathbb{R} \ .}$$



Det følger heraf, at modulus for e^{iy} er 1 , og at y selv er et argument for e^{iy} . Ifølge (4.32) fremkommer e^z ved at multiplicere e^{iy} med det positive tal e^x . Følgelig er modulus af e^z lig med e^x , og y er et argument for e^z . Udtrykt ved modulus og argument har vi altså

(4.34) $$e^z = e^{x+iy} = (e^x)_y \, .$$



Begrundelsen for på dette sted at indføre e^z vil fremgå af det følgende kapitel. Her vil vi koncentrere os om selve definitionen, og specielt vise, at to grundlæggende egenskaber for den reelle eksponentialfunktion fortsat er gyldige for den komplekse eksponentialfunktion. Hertil skal vi kort omtale funktioner med komplekse værdier.

En funktion, der til ethvert reelt tal t lader svare et komplekst tal $f(t)$, kaldes en kompleks funktion af en reel variabel. Hvis $R = \alpha + i\beta$ er et komplekst tal, er et eksempel på en sådan funktion

(4.35) $$f(t) = e^{Rt} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \, , \quad t \in \mathbb{R} \, .$$

For ethvert t kan det komplekse tal $f(t)$ udtrykkes ved hjælp af real– og imaginærdel

$$f(t) = \mathrm{Re}(f(t)) + i \, \mathrm{Im}(f(t)) \, .$$

Sætter vi $f_1(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ og $f_2(t) = \mathrm{Im}(f(t))$ har vi altså

(4.36) $$f(t) = f_1(t) + i \, f_2(t) \, ,$$

hvor $f_1(t)$ og $f_2(t)$ er sædvanlige reelle funktioner. Funktionen (4.36) siges at være *differentiabel*, hvis $f_1(t)$ og $f_2(t)$ begge er differentiable, og i dette tilfælde indføres *differentialkvotienten* af $f(t)$ ved

(4.37) $$\frac{d}{dt}(f(t)) = f'(t) = f_1'(t) + if_2'(t) \, .$$

Vi kan nu vise

Sætning 4.9 For den komplekse eksponentialfunktion gælder

(4.38) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \qquad \text{for alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

For ethvert $R \in \mathbb{C}$ er funktionen $f(t) = e^{Rt}$ differentiabel, og

(4.39) $$\frac{d}{dt}(e^{Rt}) = Re^{Rt}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Bevis Med $z_1 = x_1+iy_1$ og $z_2 = x_2+iy_2$ har vi ifølge (4.34), at $e^{z_1} = (e^{x_1})_{y_1}$ og $e^{z_2} = (e^{x_2})_{y_2}$. Herefter fås ved hjælp af (4.9)

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = (e^{x_1})_{y_1} \cdot (e^{x_2})_{y_2} = (e^{x_1} e^{x_2})_{y_1+y_2} = (e^{x_1+x_2})_{y_1+y_2}$$

$$= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}\,.$$

Dette viser (4.38). For at vise (4.39) sætter vi $R = \alpha+i\beta$. Af (4.35) og (4.37) fås

$$\frac{d}{dt}(e^{Rt}) = \frac{d}{dt}(e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\sin\beta t)$$

$$= (\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - e^{\alpha t} \cdot \beta\sin\beta t) + i(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + e^{\alpha t} \cdot \beta\cos\beta t)$$

$$= e^{\alpha t}[(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t) + i(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t)]$$

$$= e^{\alpha t}(\alpha + i\beta)(\cos\beta t + i\sin\beta t) = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t} = Re^{Rt}$$

□

Definitionen i (4.32) kan i første omgang virke lidt ejendommelig, fordi der ikke umiddelbart synes at være nogen grunde til, at funktionerne cosinus og sinus skal indgå i en udvidelse af eksponentialfunktionen. Men man kan faktisk vise (hvad der gøres i en opgave), at når e^z skal være en udvidelse af den sædvanlige eksponentialfunktion, og når reglerne (4.38) og (4.39) skal være opfyldte, da er der kun én mulig definition, nemlig (4.32).

For det komplekse tal r_v har vi $r_v = r\cos v + ir\sin v = r(\cos v + i\sin v)$ og dermed ifølge (4.33)

$$r_v = re^{iv} .$$

I almindelighed benyttes herefter formen re^{iv}, når man vil fremhæve modulus og argument for komplekse tal. De regler, vi tidligere har vist i forbindelse med fremstillingsformen r_v, svarer til regler for den komplekse eksponentialfunktion. Specielt er (4.19), altså $(r_v)^n = (r^n)_{nv}$, det samme som

$$(re^{iv})^n = r^n e^{inv} ,$$

hvor identiteten $(e^{iv})^n = e^{inv}$ følger ved gentagen brug af (4.38).

Ifølge (4.33) er e^{iy} på simpel måde udtrykt ved hjælp af $\cos y$ og $\sin y$. Regning med disse specielle eksponentialfunktioner svarer derfor til regning med cosinus og sinus. Rent faktisk kan man let angive cosinus og sinus ved hjælp af den komplekse eksponentialfunktion. Af (4.33), altså

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

følger det ved at erstatte y med $-y$, at

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y .$$

Ved at addere, henholdsvis subtrahere, disse to ligninger fås

Eulers formler

(4.40) $$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

(4.41) $$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Disse formler kan benyttes ved reduktion eller omformning af trigonometriske udtryk.

Eksempel 4.10 Ved hjælp af Eulers formler fås

$$\cos^2 x \sin 3x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]^2 \left[\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{8i}\left[e^{i2x} + e^{-i2x} + 2\right]\left[e^{i3x} - e^{-i3x}\right]$$

$$= \frac{1}{8i}\left[e^{i5x} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-i5x} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + 2\,\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\sin 5x + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x \; .$$